АКАДЕМИЯ НАУК СССР

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ

ТОМ I
ВЫПУСК
3

U. of Ill. LIBRARY
SEP 8 1971
CHICAGO CIRCLE

1956

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
МОСКВА

на основании предельных теорем можно вместо распределения $f[\xi_n(t)]$ рассматривать распределение $f[\xi(t)]$ (примером может служить общеизвестный статистический критерий Колмогорова).

Во-вторых, часто процесс $\xi(t)$ можно аппроксимировать последовательностью имеющих более простую структуру процессов $\xi_n(t)$. Поэтому при изучении свойств процесса $\xi(t)$ мы должны знать, какие свойства процессов $\xi_n(t)$ сохраняются при подобном предельном переходе, что тоже можно свести к изучению предельных распределений для $f[\xi_n(t)]$, где f — некоторая функция, определенная на траекториях процесса. Хотя такие рассмотрения до сих пор очень редки и часто не совсем строги (можно привести в качестве примера попытку изучения некоторых марковских процессов путем аппроксимации их дискретными в статье В. Феллера [10]), методы изучения случайных процессов, основанные на аппроксимации их простейшими, являются довольно мощными и, возможно, вскоре получат довольно широкое распространение, и, следовательно, необходимость в различных предельных теоремах для случайных процессов возрастет.

1.3. Метод получения предельных теорем, применяемый в этой статье, состоит в следующем:

Пусть имеется последовательность процессов $\xi_n(t)$, конечномерные распределения которых сходятся к конечномерным распределениям процесса $\xi(t)$. Предположим, что траектории процессов $\xi_n(t)$ и $\xi(t)$ с вероятностью 1 принадлежат некоторому множеству K функции $x(t)$, о котором естественно предположить, что функции из K определяются своими значениями на некотором счетном всюду плотном множестве N значений t. Оказывается, что тогда можно построить процессы $\overline{\xi}_n(t)$ и $\overline{\xi}(t)$ так, чтобы $\overline{\xi}_n(t)$ сходились с вероятностью 1 к $\overline{\xi}(t)$ для всех t из N и, кроме того, $\overline{\xi}_n(t)$ и $\xi_n(t)$, $\overline{\xi}(t)$ и $\xi(t)$ имели одинаковые распределения, а траектории $\overline{\xi}_n(t)$ и $\overline{\xi}(t)$ с вероятностью 1 принадлежали K. Пусть теперь F — класс функций, заданных на K и непрерывных в некоторой топологии S, определенной в K. Найдем условия, которые нужно дополнительно наложить на последовательность $x_n(t)$ из K, сходящуюся к $x(t)$ из K для всех t из N, чтобы $x_n(t)$ сходилась к $x(t)$ в топологии S. Если эти условия выполняются для последовательности $\overline{\xi}_n(t)$, то $\overline{\xi}_n(t)$ с вероятностью 1 сходится к $\overline{\xi}(t)$ в топологии S, а значит, для любого $f \in F$ $f[\overline{\xi}_n(t)]$ сходится с вероятностью 1 к $f[\overline{\xi}(t)]$. Тем более, распределение $f[\overline{\xi}_n(t)]$ будет сходиться к распределению $f[\overline{\xi}(t)]$, а так как распределение $f[\overline{\xi}_n(t)]$ совпадает с распределением $f[\xi_n(t)]$ и распределение $f[\overline{\xi}(t)]$ совпадает с распределением $f[\xi(t)]$, то распределение $f[\xi_n(t)]$ будет сходиться к распределению $f[\xi(t)]$.

Такой план получения предельных теорем проводится для того случая, когда K является совокупностью всех функций без разрывов второго рода — это, пожалуй, простейший класс функций, определяемых своими значениями на всюду плотном множестве значений t (конечно, после совокупности всех непрерывных функций, но для таких процессов вопрос решен в [5]). Кроме того имеется обширный класс процессов, траектории которых с вероятностью 1 не имеют разрывов второго рода.

Основная трудность, которая здесь возникает, это выбор разумных классов функций, т. е. выбор топологии. Еще в [7] была предложена

одна топология в пространстве функций без разрывов второго рода, возникшая на основании изучения сходимости процессов с независимыми приращениями, но, как оказалось впоследствии, она может иметь более широкое применение и довольно естественна *. Здесь рассматривается еще несколько топологий, являющихся естественными с некоторых точек зрения. § 2 посвящен изучению условий сходимости в этих топологиях, причем условия сходимости содержат упоминаемые выше условия, которые нужно дополнительно наложить на сходящуюся на всюду плотном множестве значений последовательность функций, чтобы имела место сходимость в соответствующей топологии. § 3 содержит предельные теоремы для случайных процессов.

Хотелось бы отметить, что, хотя предложенный метод проводится только для такого, довольно специального выбора топологий, а также довольно узкого класса процессов, он может быть применен и для других топологий и для более сложных процессов, например, для случайных функций многих переменных. Последнее не делалось в этой работе лишь потому, что теория случайных функций многих переменных еще не настолько развита, чтобы можно было видеть, какие классы функций естественно рассматривать (кроме, конечно, непрерывных, для которых вопрос решен в [5]).

Я пользуюсь случаем, чтобы выразить свою глубокую признательность Е. Б. Дынкину и А. Н. Колмогорову за ценную консультацию, полученную во время неоднократных обсуждений приведенных здесь результатов.

§ 2. Пространство K_X. Топологии в этом пространстве

2.1. Пусть X — полное метрическое сепарабельное пространство с элементами $x, y, \ldots$ и $\rho(x, y)$ обозначает расстояние между элементами x и y. Обозначим через K_X пространство всех функций $x(t)$, определенных на отрезке $[0,1]$, принимающих значения из X, имеющих в каждой точке предел слева и непрерывных справа (при $t = 1$ — слева).

Изучим некоторые свойства функций, входящих в K_X. Под величиной скачка функции $x(t)$ в точке t_0 мы будем понимать $\rho(x(t_0 - 0), x(t_0 + 0))$.

2.1.1. Если $x(t) \in K_X$, то для всякого положительного ε существует лишь конечное число точек t, где величины скачков $x(t)$ превосходят ε. (Так как если бы существовала последовательность $t_k \to t_0$, такая, что $\rho(x(t_k + 0), x(t_k - 0)) > \varepsilon$, то в точке t_0 функция $x(t)$ не имела бы предела или справа или слева.)

2.1.2. Пусть $t_1, t_2, \ldots, t_k$ все точки, где величины скачков $x(t)$ не менее ε. Тогда существует такое δ, что как только $|t' - t''| < \delta$ и t' и t'' оба принадлежат одному из интервалов $(0, t_1)$, $(t_1, t_2), \ldots, (t_k, 1)$, то $\rho(x(t'), x(t'')) < \varepsilon$. Действительно, если бы это было не так, то существовали последовательности t_n' и t_n'', сходящиеся к некоторой точке t_0 и принадлежащие одному и тому же из интервалов $(0, t_1), \ldots (t_k, 1)$, такие, что $\rho(x(t_n'), x(t_n'')) \geqslant \varepsilon$. Точки t_n' и t_n'' лежат по разные стороны от t_0 (иначе не могло бы быть $\rho(x(t_n'), x_n(t_n'')) \geqslant \varepsilon$ и, следовательно,

* См. А. Н. Колмогоров, Теория вероятностей и ее применения, т. 1, вып. 2, 1956, стр. 239—247.

$\rho(x(t_0+0), x(t_0-0)) \geqslant \varepsilon$, поэтому t_0 является одной из точек $t_1, t_2, \ldots, t_k$, что противоречит тому, что t_n' и t_n'' принадлежат одному и тому же из интервалов $(0, t_1), (t_1, t_2), \ldots, (t_k, 1)$.

2.1.3. Если $x(t) \in K_X$, то для всякого $\eta > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для каждой точки $t \in [0,1]$ выполнено одно из двух неравенств:

$$\sup_{0<t_1-t<\delta} \rho(x(t), x(t_1)) < \eta;$$
$$\sup_{0<t-t_1<\delta} \rho(x(t_1), x(t)) < \eta. \qquad (2.1)$$

Это утверждение вытекает непосредственно из 2.1.2. Ему можно придать следующую, более компактную форму:

2.1.4. Для $x(t) \in K_X$

$$\sup_{-\delta<t_1-t<0<t_2-t<\delta} \min[\rho(x(t_1), x(t)); \rho(x(t), x(t_2))] \to 0 \text{ при } \delta \to 0. \qquad (2.2)$$

Наконец, справедливо до некоторой степени обратное утверждение:

2.1.5. Если для $x(t)$ выполняется (2.2), то существует $\bar{x}(t) \in K_X$, совпадающая с $x(t)$ во всех точках своей непрерывности.

Покажем, что $x(t)$ имеет в каждой точке пределы слева и справа. Если бы это было не так, то существовало бы $\eta > 0$ и тройки как угодно близких между собой точек $t_1 < t_2 < t_3$ таких, что $\rho(x(t_1), x(t_2)) > \eta$ и $\rho(x(t_2), x(t_3)) > \eta$. Но это противоречит (2.2). Заметим еще, что $x(t)$ обязательно совпадает либо с $x(t-0)$, либо с $x(t+0)$. Полагая $\bar{x}(1) = \lim\limits_{t \to 1} x(t)$, $\bar{x}(t) = \lim\limits_{\substack{t' \to t \\ t' > t}} x(t')$, мы и получим искомую функцию.

2.2. Теперь мы приступим к определению топологий в пространстве K_X. По-видимому, общее изучение этого вопроса (именно выделение различных классов топологий и изучение их свойств) само по себе представляет некоторый интерес. Здесь мы рассмотрим пять наиболее простых с нашей точки зрения топологий, к которым приводит рассмотрение функционалов от траекторий процессов, обычно изучаемых в теории вероятностей, а также естественные обобщения равномерной топологии на пространстве непрерывных функций, естественность которых подтверждается всем ходом математического развития.

2.2.1. Определение. *Последовательность функций $x_n(t)$ сходится к $x(t)$ равномерно в точке t_0, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое δ, что*

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \sup_{|t-t_0|<\delta} \rho(x_n(t), x(t)) < \varepsilon. \qquad (2.3)$$

Очевидно, что если $x_n(t)$ сходится к $x(t)$ равномерно в каждой точке некоторого замкнутого множества, то $x_n(t)$ сходится к $x(t)$ равномерно на всем этом множестве.

Все топологии, которые мы будем здесь рассматривать, будут такими, что для сходимости в них необходимо будет, чтобы последовательность $x_n(t)$ сходилась к $x(t)$ равномерно в каждой точке непрерывности $x(t)$.

Таким образом, если рассматривать непрерывные функции, то для них все топологии будут совпадать с обычной равномерной сходимостью.

Различие между нашими топологиями возникает, когда мы переходим к рассмотрению поведения $x_n(t)$ в окрестностях точек разрыва $x(t)$. Самое простое, что мы можем предположить, это что в точках разрыва сходимость также равномерная, и тогда получится самая обычная равномерная сходимость (в наших обозначениях топология U).

Однако, хотя такую топологию мы тоже будем рассматривать, заметим, что она не совсем естественна для пространства K_X. Дело в том, что, рассматривая равномерную топологию для K_X, мы требуем, чтобы, если $x_n(t)$ сходится к $x(t)$, точки разрыва $x_n(t)$, начиная с некоторого n, совпадали с точками разрывов $x(t)$, т. е. если мы t рассматриваем как время, мы должны допустить существование прибора, точно измеряющего время, что физически немыслимо. Гораздо естественнее считать, что функции, получаемые друг из друга малыми деформациями временной шкалы, будут близки между собой. Так мы приходим к топологии $\mathbf{J}_1$.

2.2.2. Определение. *Последовательность* $x_n(t)$ $\mathbf{J}_1$-*сходится к* $x(t)$, *если существует последовательность таких непрерывных взаимно однозначных отображений* $\lambda_n(t)$ *отрезка* $[0,1]$ *на самого себя, что*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_t \rho(x_n(t), x(\lambda_n(t))) = 0; \quad \lim_{n\to\infty} \sup_t |\lambda_n(t) - t| = 0. \tag{2.4}$$

Рассмотрим более подробно, что значит определить поведение $x_n(t)$ в окрестности точки разрыва t_0, если $x_n(t)$ сходится к $x(t)$ в какой-либо из наших топологий. Так как $x(t)$ имеет в каждой точке t пределы слева и справа, то $x(t)$ в достаточно малой окрестности точки t_0 будет равно приблизительно $x(t_0-0)$ для $t<t_0$ и $x(t_0+0)$ для $t\geqslant t_0$. Поэтому слева от t_0 найдутся интервалы, где $x_n(t)$ равна примерно $x(t_0-0)$, а справа, где $x_n(t)$ равна примерно $x(t_0+0)$ (так как точки непрерывности $x(t)$ расположены всюду плотно и в этих точках сходимость равномерная). Таким образом, вопрос о поведении $x_n(t)$ в окрестности точки t_0 есть вопрос о том, как $x_n(t)$ переходит от значения $x(t_0-0)$ к значению $x(t_0+0)$. В топологиях U и $\mathbf{J}_1$ этот переход достигается одним скачком. Как в той, так и в другой топологии для t близких к t_0 функция $x_n(t)$ может принимать значения или близкие к $x(t_0-0)$ или близкие к $x(t_0+0)$. Если оставить это условие, но не требовать, чтобы переход происходил за один скачок — в окрестности точки функция $x_n(t)$ может несколько раз переходить от значения $x(t_0-0)$ к значению $x(t_0+0)$ и наоборот, — тогда мы получим топологию $\mathbf{J}_2$.

2.2.3. Определение. *Последовательность* $x_n(t)$ $\mathbf{J}_2$-*сходится к* $x(t)$, *если существует последовательность таких взаимно однозначных отображений* $\lambda_n(t)$ *отрезка* $[0,1]$ *на себя, что*

$$\sup_t |\lambda_n(t) - t| \to 0 \text{ и } \sup_t \rho(x_n(t),\ x(\lambda_n(t))) \to 0 \text{ при } n\to\infty. \tag{2.5}$$

Две следующие топологии мы определим для того случая, когда X является линейным полным нормированным пространством. Тогда вместе с каждой функцией из K_X мы будем рассматривать ее график $\Gamma_{x(t)}$, построенный следующим образом:

Обозначим $X\times T$ пространство пар (x, t), где $x\in X$, а $t\in[0,1]$, и введем в этом пространстве метрику R:

$$R[(x_1,\ t_1);\ (x_2,\ t_2)] = \rho(x_1, x_2) + |t_1 - t_2|; \tag{2.6}$$

график $\Gamma_{x(t)}$ это замкнутое множество в $X \times T$, содержащее все пары (x, t) такие, что при каждом t точка x принадлежит отрезку, соединяющему точки $x(t-0)$ и $x(t+0)$ (в дальнейшем отрезок, соединяющий точки x_1 и x_2, мы будем обозначать $[x_1, x_2]$). График $\Gamma_{x(t)}$ является непрерывной кривой в $X \times T$, поэтому среди графиков возможно определить сходимость, которая обычно рассматривается в пространстве кривых. Так получается топология M_1.

2.2.4. Определение. *Пара функций $(y(s), t(s))$ дает параметрическое представление графика $\Gamma_{x(t)}$, если ему принадлежат те и только те пары (x, t), для которых найдется такое s, что $x = y(s)$, $t = t(s)$, при этом $y(s)$ должна быть непрерывной, а $t(s)$ непрерывной и монотонно возрастающейся* (область определения функций $y(s)$, $t(s)$ — отрезок $[0,1]$).

Заметим, что, если $(y_1(s), t_1(s))$ и $(y_2(s), t_2(s))$ дают параметрическое представление $\Gamma_{x(t)}$, то существует монотонно возрастающая функция $\lambda(s)$ такая, что $y_1(s) = y_2(\lambda(s))$ и $t_1(s) = t_2(\lambda(s))$.

2.2.5. Определение. *Последовательность $x_n(t)$ M_1-сходится к $x(t)$, если существуют такие параметрические представления $(y(s), t(s))$ для $\Gamma_{x(t)}$ и $(y_n(s), t_n(s))$ для $\Gamma_{x_n(t)}$, что*

$$\limsup_{n \to \infty} \sup_s R[(y_n(s), t_n(s)); (y(s), t(s))] = 0. \tag{2.7}$$

Топологию M_1 с точки зрения поведения в точке t_0 разрыва $x(t)$ можно охарактеризовать следующим образом; переход от $x(t_0-0)$ к $x(t_0+0)$ происходит так, что, во-первых, $x_n(t)$ находится как угодно близко к отрезку $[x(t_0-0), x(t_0)]$ и, во-вторых, $x_n(t)$ движется от $x(t_0-0)$ к $x(t)$ почти поступательно, более строго, если $x(t_0-0) < x_1 < x_2 < x(t_0)$ (имеется в виду порядок, естественный для отрезка), то если мы находимся в окрестности точки x_2, мы уже не можем вернуться в окрестность точки x_1.

Если отбросить второе требование и предположить лишь, что $x_n(t)$ при переходе от $x(t_0-0)$ к $x(t_0+0)$ все время остается в какой угодно близости отрезка $[x(t_0-0), x(t_0)]$, мы получим топологию M_2.

2.2.6. Определение. *Последовательность $x_n(t)$ M_2-сходится к $x(t)$, если*

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{(y_1, t_1) \in \Gamma_{x(t)}} \inf_{(y_2, t_2) \in \Gamma_{x_n(t)}} R[(y_1, t_1); (y_2, t_2)] = 0. \tag{2.8}$$

Пусть S обозначает одну из наших топологий. Сходимость в топологии S будет обозначаться символом $x_n(t) \xrightarrow{S} x(t)$. Отметим соотношения между введенными топологиями. Очевидно, что топология U сильнее топологии $\mathbf{J}_1$, которая в свою очередь сильнее топологии $\mathbf{J}_2$. Так же очевидно, что топология M_1 сильнее топологии M_2. Напомним, что топология S_1 сильнее топологии S_2, если всякая последовательность, сходящаяся в топологии S_1, сходится и в топологии S_2. Для линейных пространств X можно рассматривать все наши топологии. Легко видеть, что сходимость в топологии M_2 вытекает из сходимости в любой другой топологии, а сходимость в топологии $\mathbf{J}_1$ влечет сходимость во всякой другой топологии, за исключением топологии U. Примеры показывают, что топологии

M_1 и $\mathbf{J}_2$ несравнимы. (Действительно, пусть X — вещественная прямая; положим

$$x(t) = \begin{cases} 0; & t < 1/2; \\ 1; & t \geqslant 1/2; \end{cases}$$

$$x_n'(t) = \begin{cases} 0; & t < 1/2 - 1/n; \\ n(t - 1/2) + 1/2; & 1/2 - 1/n \leqslant t < 1/2 + 1/n; \\ 1; & t > 1/2 + 1/n; \end{cases}$$

$$x_n''(t) = \begin{cases} 0; & t < 1/2 - 1/n; \\ 1; & 1/2 - 1/n \leqslant t < 1/2; \\ 0; & 1/2 \leqslant t < 1/2 + 1/n; \\ 1; & t \geqslant 1/2 + 1/n; \end{cases}$$

тогда $x_n'(t) \xrightarrow{M_1} x(t)$, но не сходится к $x(t)$ в топологии $\mathbf{J}_2$, а $x_n''(t) \xrightarrow{\mathbf{J}_1} x(t)$, но не сходится к $x(t)$ в топологии M_1). Если утверждение «топология S_1 сильнее топологии S_2» записывать $S_1 \to S_2$, то, резюмируя все вышесказанное, получим:

$$U \to \begin{matrix} \nearrow M_1 \searrow \\ \mathbf{J}_1 \qquad M_2. \\ \searrow \mathbf{J}_2 \nearrow \end{matrix} \tag{2.9}$$

Отметим еще связь, которая существует между введенными нами топологиями и функционалами, которые часто встречаются в теории вероятностей. X будет у нас вещественная прямая. Рассмотрим следующие функционалы:

2.2.7. Верхняя и нижняя грань функции на некотором отрезке $[t_1, t_2]$:

$$M_{[t_1, t_2]}[x(t)] = \sup_{t_1 \leqslant t \leqslant t_2} x(t); \quad m_{[t_1, t_2]}[x(t)] = \inf_{t_1 \leqslant t \leqslant t_2} x(t).$$

2.2.8. Число пересечений $\nu_{[t_1, t_2]}^{[a, b]}[x(t)]$ полосы $[a, b]$ на отрезке $[t_1, t_2]$ равно k, если можно указать $k+1$ точку $t^{(0)} < t^{(1)} < \ldots < t^{(k)}$ на $[t_1, t_2]$, так что либо $x(t^{(0)}) \leqslant a$, $x(t^{(1)}) \geqslant b$, $x(t^{(2)}) \leqslant a, \ldots$, либо $x(t^{(0)}) \geqslant b$, $x(t^{(1)}) \leqslant a$, $x(t^{(2)}) \geqslant b, \ldots$ и нельзя найти $k+2$ точки, обладающие тем же свойством.

2.2.9. Величина $\gamma_{[t_1, t_2], a}^{+}[x(t)]$ первого перескока через заданный уровень a на отрезке $[t_1, t_2]$. Определим сначала величину $\gamma_{[0.1], a}^{+}[x(t)]$. Пусть $\tau_a[x(t)] = \inf_{x(t) > a} t$, если $\sup x(t) \geqslant \alpha$ и $\tau_a[x(t)] = 1$, если $\sup x(t) < a$. Тогда

$$\gamma_{[0,1], k}^{+}[x(t)] = \begin{cases} x(\tau_a[x(t)]) - a & \text{при } \tau_a[x(t)] < 1; \\ -1 & \text{при } \tau_a[x(t)] = 1. \end{cases}$$

Далее полагаем

$$\gamma_{[t_1, t_2], a}^{+}[x(t)] = \gamma_{[0,1], a}^{+}[\bar{x}(t)], \text{ где } \bar{x}(t) = \begin{cases} x(t_1 + 0), & t < t_1; \\ x(t) & t_1 \leqslant t \leqslant t_2; \\ x(t_2 - 0), & t > t_2. \end{cases}$$

Справедливы следующие утверждения, доказательства которых просты и здесь не приводятся.

2.2.10. Для того чтобы $x_n(t) \xrightarrow{M_2} x(t)$, необходимо и достаточно, чтобы $M_{[t_1, t_2]}[x_n(t)] \to M_{[t_1, t_2]}[x(t)]$ и $m_{[t_1, t_2]}[x_n(t)] \to m_{[t_1, t_2]}[x_n(t)]$, если t_1 и t_2—точки непрерывности $x(t)$.

2.2.11. Для того чтобы $x_n(t) \xrightarrow{M_1} x(t)$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\nu_{[t_1, t_2]}^{[a, b]}[x_n(t)] \to \nu_{[t_1, t_2]}^{[a, b]}[x(t)]$$

для всех t_1 и t_2, являющихся точками непрерывности $x(t)$ и почти для всех a и b.

2.2.12. Для того чтобы $x_n(t) \xrightarrow{J_2} x(t)$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\gamma^+_{[t_1,t_2],a}[x_n(t)] \to \gamma^+_{[t_1,t_2],a}[x(t)]$$

почти для всех a и для всех t_1 и t_2, являющихся точками непрерывности $x(t)$.

2.2.13. Для того чтобы $x_n(t) \xrightarrow{J_1} x(t)$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\gamma^+_{[t_1,t_2],a}[x_n(t)] \to \gamma^+_{[t_1,t_2],a}[x(t)] \text{ и } \nu^{[a,b]}_{[t_2,t_3]}[x_n(t)] \to \nu^{[a,b]}_{[t_1,t_2]}x(t)]$$

для всех t_1 и t_2, являющихся точками непрерывности $x(t)$, и почти для всех a и b.

Приступим теперь к более подробному изучению введенных топологий, что будет проводиться от более слабых к более сильным топологиям.

2.3. Топология M_2.

Сначала мы найдем условие сходимости в топологии M_2, эквивалентное определению, но выражающееся в терминах не графиков, а самих функций $x_n(t)$ и $x(t)$.

2.3.1. *Для того чтобы* $x_n(t) \xrightarrow{M_2} x(t)$, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\lim_{c\to 0}\overline{\lim_{n\to\infty}}\Delta_{M_2}(c; x_n(t), x(t)) = 0 \tag{2.10}$$

где

$\Delta_{M_2}(c; y(t), x(t)) = \sup H(x(t_c), y(t), x(t_c^*))$; $t_c = \max[0, t-c]$; $t_c^* = \min[1, t+c]$, *а* $H(x_1, x_2, x_3)$ *есть расстояние точки* x_2 *от отрезка* $[x_1, x_3]$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $x_n(t) \xrightarrow{M_2} x(t)$. Покажем тогда, что, выбирая достаточно малое c, можем сделать $\overline{\lim_{n\to\infty}}\Delta_{M_2}(c, x_n(t), x(t))$ как угодно малым. Пусть c таково, что, если $t_1 < t_2 < t_3$, $t_2 - t_1 < 2c$, $t_3 - t_2 < 2c$, то $\min[\rho(x(t_1), x(t_2)); \rho(x(t_2), x(t_3))] < \varepsilon$. Обозначим через $t_1, t_2, \ldots, t_k$ все точки, размеры скачков в которых не менее ε, и, кроме того, пусть c настолько мало, что $\rho(x(t'), x(t'')) < \varepsilon$, как только $|t' - t''| < c$ и t' и t'' принадлежат одному из интервалов $(0, t_1), (t_1, t_2) \ldots, (t_k, 1)$. Выберем столь большое n, чтобы

$$\sup_{(y_1,t_1)\in\Gamma_{x(t)}} \inf_{(y_2,t_2)\in\Gamma_{x_n(t)}} R[y_1, t_1); (y_2, t_2)] < c/2. \tag{2.11}$$

Теперь, если точки t_c, t, t_c^* принадлежат все одному и тому же из интервалов $(0, t_1), (t_1, t_2), \ldots, (t_k, 1)$, то

$$H(x(t_c), x_n(t), x(t_c^*)) \leqslant c/2 + 2\varepsilon;$$

так как из (2.11) следует, что на графике $\Gamma_{x(t)}$ найдется точка $(\bar{x}, \bar{t})$ такая, что $|\bar{t} - t| < c/2$ и $\rho(\bar{x}, x_n(t)) < c/2$, и тогда, если $\bar{t} < t$, то

$$H(x(t_0), x_n(t), x(t_c^*)) < \rho(x(t_c), x(\bar{t} - 0)) + \rho(x(\bar{t} - 0), \bar{x}) + \rho(\bar{x}, x_n(t)),$$

если же $\bar{t} > t$, то

$$H(x(t_c), x_n(t), x(t_c^*)) < \rho(x(t_c^*), x(\bar{t} + 0)) + \rho(x(\bar{t} + 0), \bar{x}) + \rho(\bar{x}, x_n(t)).$$

Оценим теперь $H(x(t_c), x_n(t), x(t_c^*))$ для случая $t_c < t_i < t < t_c^*$ (случай $t_c < t < t_i < t_c^*$ совершенно симметричен). Из (2.11) следует, что на $\Gamma_{x(t)}$ найдется точка $(\tilde{x}, \tilde{t})$ такая, что $\rho(\tilde{x}, x_n(t)) < c/2$ и $|\tilde{t} - t| < c/2$. Если $\tilde{t} \neq t$, то либо $t_i > \tilde{t}$ и

$H\ (x(t_c), x_n(t),\ x_n(t_c^*)) \leqslant \rho\,(x(t_c), x(\widetilde{t}-0)) + \rho\ (x(\widetilde{t}-0),\ \widetilde{x}) + \rho\ (\widetilde{x}, x_n(t)) \leqslant$
$\leqslant 3\varepsilon + c/2$, либо $t_i < \widetilde{t}$ и

$$H(x(t_c), x_n(t), x(t_c^*)) \leqslant \rho\,(x(t_c^*), x(\widetilde{t}+0)) + \rho\,(x(\widetilde{t}+0), \widetilde{x}) + \rho\,(\widetilde{x},\ x_n(t)) \leqslant$$
$$\leqslant 3\varepsilon + c/2.$$

Если же $t_i = \widetilde{t}$, то

$$H(x(t_c), x_n(t), x(t_c^*)) \leqslant H(x(t_c), \widetilde{x}, x(t_c^*)) + \rho(\widetilde{x}, x_n(t)) \leqslant$$
$$\leqslant \rho(x(t_c), x(t_i-0)) + \rho(x(t_c^*), x(t_i+0)) + H(x(t_i-0), \widetilde{x}, x(t_i+0)) +$$
$$+ \rho(\widetilde{x}, x_n(t)) \leqslant 2\varepsilon + c/2,$$

так как $H(x(t_i-0), \widetilde{x}, x(t_i+0)) = 0$. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть выполнено (2.10). Это значит, что можно взять настолько малое c, что для достаточно больших n

$$\Delta_{M_2}(c; x_n(t), x(t)) < \varepsilon \tag{2.12}$$

и, кроме того, c настолько мало, что, если t'' и t' принадлежат одному из интервалов

$$(0, t_1), (t_1, t_2), \ldots, (t_k, 1);\ |t_2'' - t'| < 2c,\ \text{то}\ \rho(x(t''), x(t')) < \varepsilon$$

и $2c$ менее длины каждого из этих интервалов. Покажем, что для каждой точки $\Gamma_{x_n(t)}$ найдется точка графика $\Gamma_{x(t)}$ такая, что расстояние между этими точками в метрике R будет менее δ, которое можно сделать как угодно малым подходящим выбором ε и c.

Из того, что $H(x(t_c), x_n(t), x(t_c^*)) < \varepsilon$, если t_c и t_c^* принадлежат одному из интервалов $(0, t_1), (t_1, t_2), \ldots, (t_k, 1)$, следует, что $\rho(x_n(t), x(t_c)) < 3\varepsilon$, а значит,

$$\rho(x_n(t), x(t)) < 4\varepsilon. \tag{2.13}$$

Поэтому в этом случае для точки (y, t) графика $\Gamma_{x_n(t)}$ найдется точка $(\widetilde{x}, t)$ графика $\Gamma_{x(t)}$ (с тем же t) такая, что $\rho(\widetilde{x}, y) < 4\varepsilon$.

Пусть теперь $t_c < t_i < t < t_c^*$. Тогда

$$H(x(t_c), x_n(t), x(t_c^*)) < \varepsilon \quad \text{и} \quad H(x(t_c), x_n(t-0), x(t_c^*)) < \varepsilon.$$

Поэтому для любой точки отрезка $[x_n(t)-0), x_n(t)]$ найдется точка x' на $[x(t_c), x(t_c^*)]$ такая, что $\rho(x', x) < 2\varepsilon$. А так как $\rho(x(t_c), x(t_i-0)) < \varepsilon$ и $\rho(x(t_c^*), x(t_i+0)) < 2\varepsilon$, то на отрезке $[x(t_i-0), x(t_i+0)]$ найдется точка $\widetilde{x}$ такая, что $\rho(x', \widetilde{x}) < 2\varepsilon$.

Таким образом, $R[(y, t), (\widetilde{x}, t_i)] < 4\varepsilon + c$.

Достаточность доказана.

2.3.2. Замечание. Вместо величины $\overline{H}(x_1, x_2, x_3)$ можно рассматривать любую другую величину такую, что

$$\varphi_1(H(x_1, x_2, x_3)) \leqslant \overline{H}(x_1, x_2, x_3) \leqslant \varphi_2(H(x_1, x_2, x_3)),$$

где $\varphi_i(t)$ непрерывные неотрицательные функции, обращающиеся в нуль лишь при $t = 0$. В случае, когда X гильбертово пространство, можно положить

$$\overline{H}(x_1, x_2, x_3) = \rho(x_1, x_2) + \rho(x_2, x_3) - \rho(x_2, x_3).$$

2.3.3. Общие условия сходимости в топологии M_2. *Для того чтобы* $x_n(t) \xrightarrow{M_2} x(t)$, *необходимо и достаточно, чтобы*

а) $x_n(t)$ *сходилось к* $x(t)$ *на множестве значений* t, *содержащем* 0 *и* 1 *и всюду плотном на* $[0,1]$,

б) $\lim\limits_{c\to 0} \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \Delta_{M_2}[c;\ x_n(t)] = 0$,

где

$$\Delta_{M_2}[c; x_n(t)] = \sup_{\substack{t\in[0,1];\, t_1\in[t_c,\, t_c+c/2] \\ t_2\in[t_c^*-c/2,\, t_c^*]}} H(x(t_1),\ x(t), x(t_2)).$$

Доказательство. Необходимость условия а) вытекает из того, что, если $x_n(t) \xrightarrow{M_2} x(t)$, то

$$x_n(t) \to x(t)$$

в каждой точке непрерывности $x(t)$.

Необходимость условия б).

$$H(x_n(t_1), x_n(t), x_n(t_2)) \leqslant H(\tilde{x}_1, x_n(t), \tilde{x}_2) + \rho(\tilde{x}_1, x_n(t_1)) + \rho(\tilde{x}_2, x_n(t_2)).$$

Так как $x_n(t) \xrightarrow{M_2} x(t)$, то можно указать такие точки t_1' и t_2', что величины $|t_1' - t_1|$, $|t_2' - t_2|$, $\rho(\tilde{x}_1, x_n(t_1))$, $\rho(\tilde{x}_2, x_n(t_2))$ малы и точки $\tilde{x}_1$ и $\tilde{x}_2$ принадлежат соответственно отрезкам $[x(t_1'-0), x(t_1')]$ и $[x(t_2'-0), x(t_2')]$. Пусть теперь c таково, что у $x(t)$ не может быть двух скачков размера не менее ε на расстоянии меньшем $3c$ и, если $\bar{t}_2 - \bar{t}_1 \leqslant 2c$ и между этими точками не происходит скачок величины не менее ε, то $\rho(x(\bar{t}_2), x(\bar{t}_1)) < \varepsilon$. Оценим $H(\tilde{x}_1, x_n(t), \tilde{x}_2)$ в предположении, что $|t_1' - t_1| < c/4$ и $|t_2' - t_2| < c/4$. Если в (t_1', t_2') и (t_c, t_c^*) нет скачков функции $x(t)$, размеры которых не менее ε, то

$$H(\tilde{x}_1, x_n(t), \tilde{x}_2) \leqslant H(x(t_c), x_n(t), x(t_c^*)) + 4\varepsilon.$$

Если же в каком-нибудь из интервалов (t_1', t_2') или (t_c, t_c^*) есть скачок, размера не менее ε в точке $\bar{t}$, то рассмотрим два случая:

1) $t_1' < \bar{t} < t_2'$; $t_c < \bar{t} < t_c^*$. Тогда $\rho(x(t_c), \tilde{x}_1) \leqslant 2\varepsilon$ и $\rho(x(t_c^*), \tilde{x}_2) \leqslant 2\varepsilon$, следовательно,

$$H(\tilde{x}_1, x_n(t), \tilde{x}_2) \leqslant 4\varepsilon + H(x(t_c), x_n(t), x(t_c^*)).$$

2) $\bar{t}$ лежит между t_1' и t_c (может совпадать с t_1'). Тогда в интервале $(t_{c/4}, t_{c/4}^*)$ все скачки $x(t)$ меньше ε, поэтому $\rho(x(t_{c/4}), x(t_{c/4}^*)) < \varepsilon$, а значит, $\rho(x(t_{c/4}^*), x_n(t)) < \varepsilon + H(x(t_{c/4}), x_n(t), x(t_{c/4}^*))$. Кроме того, так как $\rho(x(t_{c/4}^*), x(t_c^*)) < \varepsilon$, и скачок $x(t)$ в точке t_2' также меньше, чем ε,

$$\rho(x_n(t), \tilde{x}_2) < 3\varepsilon + H(x(t_{c/4}), x_n(t), x(t_{c/4}^*)).$$

Следовательно,

$$H(\tilde{x}_1, x_n(t), \tilde{x}_2) < 3\varepsilon + H(x(t_{c/4}), x_n(t), x(t_{c/4}^*)).$$

Необходимость доказана.

Достаточность. Нам нужно показать, что при выполнении условий а) и б)

$$\lim_{c\to 0} \overline{\lim_{n\to\infty}} \Delta_{M_2}(c; x_n(t), x(t)) = 0.$$

Предположим противное, что найдутся последовательности $c_k \to 0$, $n_j^k \to \infty$ при $j \to \infty$ и такое η, что

$$\Delta_{M_2}(c_k;\ x_{n_j^k}(t),\ x(t)) > \eta.$$

Это означает, что найдутся точки $t_1^{n_j^k}$, $t_2^{n_j^k}$, $t_3^{n_j^k}$ такие, что $t_3^{n_j^k} - t_2^{n_j^k} = t_2^{n_j^k} - t_1^{n_j^k} = c_k$ (так как $t_i^{n_j^k}$ при достаточно малых c_k лежат все внутри интервала $[0,1]$, потому что из а) и б) следует, что $x_n(t)$ сходится равномерно к $x(t)$ в точках 0 и 1) и

$$H(x(t_1^{n_j^k}),\ x_{n_j^k}(t_2^{n_j^k}),\ x(t_3^{n_j^k})) > \eta.$$

Из условия а) вытекает, что можно для всяких ε и δ найти такое n_0, что в любом интервале длины δ существует точка t^*, для которой $\rho(x_n(t^*), x(t^*)) \leqslant \varepsilon$ при $n > n_0$. Пусть δ_1 настолько мало, что

$$\sup_{-\delta_1 < t_1 - t_2 < 0 < t_3 - t_2 < \delta_1} \min[\rho(x(t_1), x(t_2));\ \rho(x(t_2), x(t_3))] < \varepsilon. \tag{2.14}$$

Далее из условия б) следует, что можно найти такие $\bar{c}_1, \bar{c}_2$ и n', что для $n > n'$

$$\Delta_{M_2}(\bar{c}, x_n(t)) < \varepsilon;\ \ \Delta_{M_2}(\bar{c}_2, x_n(t)) < \varepsilon; \tag{2.15}$$

$$\bar{c}_1 > 2\bar{c}_2;\ \ \bar{c}_1 > c_k > \bar{c}_2;\ \ 2\bar{c}_1 < \delta_1.$$

Тогда у нас либо $\rho(x(t_1^{n_j^k}), x(t)) < 2\varepsilon$, $t \in (t_2^{n_j^k} - \bar{c}_1,\ \ t_2^{n_j^k} - \bar{c}_1/2)$,

$$\rho(x(t_3^{n_j^k}), x(t)) < 2\varepsilon,\ \ t \in (t_2^{n_j^k} + \bar{c}_1/2,\ \ t_2^{n_j^k} + \bar{c}_1),$$

либо $\rho(x(t_1^{n_j^k}), x(t)) < 2\varepsilon$, $t \in (t_2^{n_j^k} - \bar{c}_2,\ \ t_2^{n_j^k} - \bar{c}_2/2)$,

$$\rho(x(t_3^{n_j^k}), x(t)) < 2\varepsilon,\ \ t \in (t_2^{n_j^k} + \bar{c}_2/2,\ \ t_2^{n_j^k} + \bar{c}_2)$$

(это вытекает из (2.14) и из того, что все четыре интервала попарно не пересекаются). Если выбрать теперь $\delta < \bar{c}_2/2$, то для $n_j^k > \max(n_0, n')$ будут существовать три точки t_1, $t_2^{n_j^k}$, t_3' такие, что

$$H(x_{n_j^k}(t_1'),\ x_{n_j^k}(t_2^{n_j^k}),\ x_{n_j^k}(t_3')) > \eta - 12\varepsilon$$

и либо $\bar{c}_1/2 \leqslant |t_2^{n_j^k} - t_j'| \leqslant \bar{c}_1$, либо $\bar{c}_2/2 \leqslant |t_2^{n_j^k} - t_i'| \leqslant \bar{c}_2$, $i = 1,3$. Следовательно, либо $\Delta_{M_2}(\bar{c}_1, x_{n_i^k}(t)) > \eta - 12\varepsilon$, либо $\Delta_{M_2}(\bar{c}_2, x_{n_j^k}(t)) > \eta - 12\varepsilon$, что противоречит (2.15), если только выбрать $13\,\varepsilon < \eta$.

Заметим, что, доказывая достаточность, мы доказали более сильное утверждение:

2.3.4. Для того чтобы $x_n(t) \xrightarrow{M_2} x(t)$, достаточно, чтобы выполнялось условие а) и

б′) $\lim\limits_{c \to 0} \overline{\lim\limits_{n \to \infty}} \Delta_{M_2}(c, x_n(t)) = 0.$

Таким образом, мы можем получать различные довольно эффективные достаточные условия, выбирая различные последовательности $c_k \to 0$.

При изучении свойств компактности множеств функций в топологиях $\mathbf{J}_1$, $\mathbf{J}_2$, M_1, M_2 важную роль будет играть

2.3.5. Пусть последовательность $x_n(t)$ сходится к произвольной функции $x(t)$ для $t \in N$ — некоторого всюду плотного на $[0,1]$ множества, содержащего 0 и 1 и, кроме того,

$$\lim_{c \to 0} \overline{\lim_{n \to \infty}} (\Delta_{M_2}(c, x_n(t)) + \sup_{0<t<c} \rho(x_n(t), x_n(0)) + \sup_{1-c<t<1} \rho(x_n(1), x_n(t))) = 0.$$

Тогда существует $\bar{x}(t) \in K_X$ такая, что $x_n(t) \xrightarrow{M_2} \bar{x}(t)$.

Доказательство. Пусть t_i — точки N. Покажем, что существуют

$$\lim_{t_i \to t,\ t_i > t} x(t_i) \quad \text{и} \quad \lim_{t_i \to t,\ t_i < t} x(t_i).$$

Достаточно доказать существование одного из этих пределов, например, предела справа. Пусть сначала $t = 0$. Предположим, что $\lim\limits_{t_i \to 0} x(t_i)$ не существует, т. е. можно указать последовательность t_{i_k} и ε такие, что $\rho(x(t_{i_k}), x(t_{i_{k+1}})) > \varepsilon$.

Возьмем настолько малое c, чтобы $\overline{\lim\limits_{n \to \infty}} \Delta_{M_2}(c, x_n(t)) < \varepsilon/4$, и пусть k такое, что t_{i_k} и $t_{i_{k+1}} < c/2$. Тогда, если t_r такая точка, что

$$t_{i_k} + c/2 < t_r < t_{i_k} + c \quad \text{и} \quad t_{i_{k+1}} + c/2 < t_r < t_{i_{k+1}} + c,$$

мы будем иметь

$$H(x(t_{i_k}), x(t_{i_{k+1}}), x(t_r)) < \varepsilon/4 \quad \text{и} \quad H(x(t_{i_{k+1}}), x(t_{i_k}), x(t_r)) < \varepsilon/4.$$

Но это противоречит тому, что $\rho(x(t_{i_k}), x(t_{i_{k+1}})) > \varepsilon$. Предположим теперь, что не существует предела $\lim\limits_{t_i \to t,\ t_i > t} x(t_i)$, где t — внутренняя точка отрезка $[0, 1]$. Тогда возможны два случая:

1) существует ε такое, что в какой угодно близости точки t — найдется тройка точек, $t_{r_1} < t_{r_2} < t_{r_3}$, лежащих правее t и таких, что

$$\rho(x(t_{r_i}), x(t_{r_j})) > \varepsilon \quad \text{при} \quad i \neq j; \quad i, j = 1, 2, 3.$$

2) Существуют величины $\bar{x}_1$ и $\bar{x}_2$ такие, что каждую последовательность $x(t_{n_k})$, $t_{n_k} > t$, $t_{n_k} \to t$ можно разложить на две последовательности $x(t_{n_k'})$ и $x(t_{n_k''})$ (множество $\{n_k\}$ является объединением множеств $\{n_k'\}$ и $\{n_k''\}$) так, что

$$\lim_{\substack{t_{n_k}' \to t \\ n_k}} x(t_{n_k}') = \bar{x}_1 \quad \text{и} \quad \lim_{\substack{t_{n_k}'' \to t \\ n_k}} x(t_{n_k}'') = \bar{x}_2.$$

Покажем, что оба эти предположения противоречат условиям леммы.

Первый случай. Возьмем c_0, такое, чтобы $\overline{\lim\limits_{n \to \infty}} \Delta_{M_2}(c, x_n(t)) < \mu$ при $c < c_0$ (величину μ подберем позже). Пусть точки t' и t'' из N, расположенные так, что, если $0 < \bar{t} - t < c_0/2$, то $\bar{t} - c_0 < t' < \bar{t} < c_0/2$ и $\bar{t} + c_0/2 < t'' < \bar{t} + c_0$. Тогда $x(t_i)$ при $t < t_i < \bar{t}$ будет находиться на расстоянии не менее μ от отрезка $[x(t'), x(t'')]$. Обозначим через A множество точек x отрезка $[x(t'), x(t'')]$, для которых $\lim\limits_{t_i \to t,\ t_i > t} \rho(x(t), x) \leqslant \mu$,

и положим $x_1 = \inf\limits_{x \in A} x$, $x_2 = \sup\limits_{x \in A} x$ (порядок на отрезке $[x(t'), x(t'')]$ определяется тем, что мы считаем $x(t') < x(t'')$). Пусть точка $\bar{x}$ множества A такая, что $\rho(x_1, \bar{x}) > \varepsilon - 2\mu$, $\rho(x_2, \bar{x}) > \varepsilon - 2\mu$. Если точки $\bar{t}'$ и $\bar{t}''$ такие, что для некоторого $c < c_0$ $\tilde{t} - c < \bar{t}' < \tilde{t} - c/2$; $\tilde{t} + c/2 < \bar{t}'' < \tilde{t} + c$ для $0 < \tilde{t} - t < c/4$ и $\rho(\bar{x}, x(\bar{t}'')) < \mu$, мы получим, что для $0 < \tilde{t} - t < c/4$ точка $x(\tilde{t})$ лежит на расстоянии не более 2μ от отрезка $[x(t'), \bar{x}]$. Следовательно, точки x_1 и x_2 должны лежать на расстоянии не более 3μ от $[x(t'), \bar{x}]$, что невозможно при $\varepsilon > 5\mu$.

Во втором случае мы для каждого ε можем указать такое δ, что при $0 < t_1 - t < \delta$ либо $\rho(x(t_1), \bar{x}_1) < \varepsilon$, либо $\rho(x(t_1), \bar{x}_2) < \varepsilon$. Если $\varepsilon < \frac{\rho(\bar{x}_1, \bar{x}_2)}{4}$, то осуществляется лишь одна из этих возможностей. Выберем c_0 такое, чтобы $\lim\limits_{n \to \infty} \Delta(c, x_n(t)) < \varepsilon$ для $c < c_0$. Тогда, если t_1 таково, что $0 < t_1 - t < \delta$ и $0 < t_1 - t < c_0$ и $\rho(\bar{x}_1, x(t_1)) < \varepsilon$, мы получим $\rho(x(\tilde{t}), \bar{x}_1) < \varepsilon$ для $\frac{t_1 - t}{3} < \tilde{t} - t < \frac{2}{3}(t_1 - t)$ и $\tilde{t} \in N$, так как

$$H(\bar{x}_1, x(\tilde{t}), x(t_1)) < \varepsilon$$

и, следовательно,

$$H(\bar{x}_1, x(\tilde{t}), \bar{x}_1) < 2\varepsilon$$

или $\rho(\bar{x}_1, x(\tilde{t})) < 2\varepsilon$, значит, $\rho(x_1, x(\tilde{t})) < \varepsilon$ (имеются лишь две возможности: либо $\rho(\bar{x}_1, x(\tilde{t})) < \varepsilon$, либо $\rho(x_1, x(\tilde{t})) > 3\varepsilon$). Выбирая точку t_2 из N, для которой $\frac{t_1}{2} < t_2 < {}^2/_3 t_1$, мы получим, что $\rho(x(\tilde{t}), \bar{x}_1) < \varepsilon$ для $\frac{t_2 - t}{3} < \tilde{t} - t < {}^2/_3(t_2 - t)$. Продолжая этот процесс бесконечно, мы получим, что $\rho(x(\tilde{t}), \bar{x}_1) < \varepsilon$ при $t < \tilde{t} < \frac{2}{3} t_1$ и, следовательно, $\lim\limits_{\tilde{t} > t, \tilde{t} \to t} x(\tilde{t}) = \bar{x}_1$. Таким образом, у $x(t)$ в каждой точке существуют пределы справа и слева. Полагая $\bar{x}(t) = \lim\limits_{\tilde{t} > t, \tilde{t} \to t, \tilde{t} \in N} x(\tilde{t})$, $\bar{x}(1) = \lim\limits_{\tilde{t} \in N, \tilde{t} \to 1} x(\tilde{t})$, мы получим функцию из K_X. Нам осталось доказать, что $x_1(t) \xrightarrow{M_2} \bar{x}(t)$. Для этого достаточно показать, что $x_n(t)$ сходится к $\bar{x}(t)$ во всех точках непрерывности $\bar{x}(t)$. Пусть t_0 — точка непрерывности $\bar{x}(t)$. Тогда, если мы возьмем точки t' и t'' из N такие, что $t_0 - c < t' < t_0 - c/2$, $t_0 + c/2 < t'' < t_0 + c$, где c таково, что $\overline{\lim\limits_{n \to \infty}} \Delta_{M_2}(c, x_n(t)) < \varepsilon$; $\rho(\bar{x}(t'), \bar{x}(t_0)) < \varepsilon$ и $\rho(\bar{x}(t''), \bar{x}(t_0)) < \varepsilon$, то получим $\overline{\lim\limits_{n \to \infty}} \rho(x_n(t_0), \bar{x}(t_0)) < 4\varepsilon$. Лемма доказана.

2.4. Топология M_1.

2.4.1. Условия сходимости. *Для того, чтобы* $x_n(t) \xrightarrow{M_1} x(t)$, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие* 2.3.3 а) *и*

$$\text{б)} \quad \lim_{c \to 0} \overline{\lim_{n \to \infty}} \Delta_{M_1}(c; x_n(t)) = 0,$$

где

$$\Delta_{M_1}(c; x_n(t)) = \sup_{t_2 - c < t_1 < t_2 < t_3 < t_2 + c} H(x(t_1), x(t_2), x(t_3)).$$

Доказательство. Необходимость условия б). Пусть $x_n(t) \xrightarrow{M_1} x(t)$. Это означает, что существуют такие параметрические пред-

ставления $(y(s),\ t(s))$ для $\Gamma_{x(t)}$ и $(y_n(s),\ t_n(s))$ для $\Gamma_{x_n(t)}$, что $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_s|t_n(s)-t(s)|=0$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_s\rho(y(s),\ y_n(s))=0$. Пусть $t_1<t_2<t_3$ и $s_1^{(n)},\ s_2^{(n)},\ s_3^{(n)}$ таковы, что $t_n(s_i^{(n)})=t_i;\ i=1,\ 2,\ 3$. Тогда

$$H(x_n(t_1),\ x_n(t_2),\ x_n(t_3))=$$
$$=H(y_n(s_1^{(n)}),\ y_n\ (s_2^{(n)}),\ y_n(s_3^{(n)}))\leqslant H(y(s_1^{(n)}),\ y(s_2^{(n)}),\ y(s_3^{(n)}))+$$
$$+3\sup_s\rho(y_n(s),\ y(s)).$$

Остается показать, что для $s_1<s_2<s_3$ при достаточно малых $t(s_3)-t(s_1)$ величину $H(y(s_1),\ y(s_2),\ y(s_3))$ можно сделать как угодно малой.

Рассмотрим три случая:

1. Если $t(s_1)=t(s_2)=t(s_3)$, что $H(y(s_1),\ y(s_2),\ y(s_3))=0$.

2. Если $t(s_1)=t(s_2)<t(s_3)$, то либо скачок $x(t)$ в точке $t(s_1)$ менее ε, $\rho(y(s_1),\ y(s_2))<\varepsilon$ и, следовательно, $H(y(s_1),\ y(s_2),\ y(s_3))<\varepsilon$, либо скачок $x(t)$ в точке $t(s_1)$ превосходит ε и тогда при достаточно малых $t(s_3)-t(s_2)$ имеем $\rho(y(s_3),\ x(t(s_1)))<2\varepsilon$, а значит, и

$$H(y(s_1),\ y(s_2),\ y(s_3))<2\varepsilon.$$

3. Если же $t(s_1)<t(s_2)<t(s_3)$, то или ни в одной из этих точек нет скачков, превосходящих ε, и, следовательно,

$$H(y(s_1),\ y(s_2),\ y(s_3))<H(x(t(s_1)),\ x(t(s_2)),\ x(t(s_3)))+3\varepsilon \quad (2.16)$$

(малость (2.16) следует из 2.1.4), или в точке $t(s_1)$ скачок больше ε, значит, в остальных точках скачки меньше ε при достаточно малом $t(s_3)-t(s_1)$ и тогда $\rho(x(t(s_2)),\ x(t(s_3)))$ мало, а с ним вместе и $H(y(s_1),\ y(s_2),\ y(s_3))$ (если скачок больший ε в точке $t(s_3)$, рассуждения аналогичны), или скачок больший ε в точке $t(s_2)$ и тогда малы $\rho(y(s_1),\ x(t(s_2-0)))$ и $\rho(x(t(s_2)),\ y(s_3))$, а значит, и

$$H(y(s_1),\ y(s_2),\ y(s_3)).$$

Необходимость доказана.

Достаточность. Предварительно покажем, что, если $\Delta_{M_1}(c;\ x(t))<h$, а $(x_1,\ t_1)$, $(x_2,\ t_2)$, $(x_3,\ t_3)$ точки графика $\Gamma_{x(t)}$ такие, что $t_2-c<t_1<t_2<t_3<t_2+c$, то $H(x_1,\ x_2,\ x_3)<h$. Для этого достаточно доказать следующие два утверждения: 1) если $H(\overline{x_1}',x_2,x_3)<h, H(\overline{x_1}'',\ x_2,\ x_3)<h$ и $x_1\in[\overline{x_2}',\ \overline{x_1}'']$, то и $H(x_1,\ x_2,\ x_3)<h$, 2) если $H(x_1,\ \overline{x_2}',\ x_3)<h$, $H(x_1,\ \overline{x_2}'',\ x_3)<h$ и $x_2\in[\overline{x_2}',\ \overline{x_2}'']$, то и $H(x_1,\ x_2,\ x_3)<h$. 1) следует из того, что, если $y'\in[\overline{x_1}',\ x_3]$ и $y''\in[\overline{x_1}'',\ x_3]$, причем $\rho(y',\ x_2)<h$ и $\rho(y'',\ x_2)<h$, то для точки y, лежащей на пересечении отрезков $[y',\ y'']$ и $[x_1,\ x_3]$, также будет $\rho(x_2,\ y)<h$. 2) следует из того, что, если $\overline{x_2}'$ и $\overline{x_2}''$ точки $[x_1,\ x_3]$ такие, что $\rho(y',\ \overline{x_2}')<h$, $\rho(y'',\ \overline{x_2}'')<h$ и $x_2=\alpha\overline{x_2}'+(1-\alpha)\overline{x_2}''$ $(0<\alpha<1)$, то для $y+\alpha y'+(1-\alpha)y''$ будем иметь $\rho(x_2,\ y)=$ $=\rho(\alpha\overline{x_2}'+(1-\alpha)\overline{x_2}'',\ \alpha y'+(1-\alpha)y'')\leqslant\rho(\alpha\overline{x_2}',\ \alpha y')+\rho((1-\alpha)\overline{x_2}'',\ (1-\alpha)y'')\leqslant$ $\leqslant\alpha\rho(\overline{x_2}',\ y')+(1-\alpha)\rho(\overline{x_2}'',\ y')\leqslant h$ (напомним, что в этом случае X — банахово пространство, мы же пользуемся расстоянием вместо нормы для однообразия обозначений). Для доказательства нашего утверждения достаточно для каждого ε и всех достаточно больших n построить такие параметрические представления $(y_n^\varepsilon(s),\ t_n^\varepsilon(s))$ для $\Gamma_{x_n(t)}$ и $(y^\varepsilon(s),\ t^\varepsilon(s))$ для $\Gamma_{x(t)}$, чтобы

$$\sup_s|t_n^\varepsilon(s)-t^\varepsilon(s)|<\varepsilon;\quad \sup_s\rho(y_n^\varepsilon(s),\ y^\varepsilon(s))<\varepsilon.$$

Пусть $(y(s),\ t(s))$ — какое-нибудь параметрическое представление $\Gamma_{x(t)}$ и $0 = s_0 < s_1 < s_2 < \ldots < s_m = 1$ таковы, что $t(s_i)$ являются или точками непрерывности $x(t)$ или точками, где размеры скачков не менее ε, причем $t(s_i) - t(s_i - 1) < \eta$ для $i = 1, \ldots, m-1$,

$$\min[\rho(y(s_i),\ y(s)),\ \rho(y(s),\ y(s_{i+1}))] < \varepsilon/2$$

для $s \in (s_i, s_{i+1})$ и, наконец, если $t(s_k) = t(s_{k+1})$, то $\varepsilon/4 < \rho(y(s_k), y(s_{k+1})) < \varepsilon/2$. Возьмем настолько большое n_0 и такое $\eta < \varepsilon$, чтобы, если $t(s_i)$ — точка непрерывности $x(t)$, то $\rho(x_n(t(s_i)),\ x(t(s_i))) < \varepsilon/4$ и $\Delta_{M_1}(\eta, x_n(t)) < \varepsilon/8$ для $n > n_0$. Тогда, если точка $t' = t(s_r) = \ldots = t(s_{r+j})$ является точкой разрыва $x(t)$ со скачком не менее ε, то на $\Gamma_{x_n(t)}$ найдутся точки $(y_r^{(n)},\ t_r^{(n)})$, $(y_{r+1}^{(n)},\ t_{r+1}^{(n)}), \ldots, (y_{r+j}^{(n)},\ t_{r+j}^{(n)})$, такие, что $|t_{r+1}^n - t'| < \eta$ и $\rho(y_{r+i}^{(n)}, y(s_{r+i})) < {}^7/_8\,\varepsilon$ (потому что отрезок $[y(s_{r-1}),\ y(s_{r+j+1})]$ отстоит не более чем на $\varepsilon/4$ от отрезка $[x_n(t(s_{r-1})),\ x_n(t(s_{r+j+1}))]$ и не более чем на $\varepsilon/2$ от отрезка $[x(t(s_r) - 0),\ x(t(s_{r+j}))]$, а все точки $\Gamma_{x(t)}$ для $t(s_{r-1}) < t < t(s_{r+j+1})$ не более чем на $\varepsilon/8$ отстоят от

$$[x_n(t(s_{r-1})),\ x_n(t(s_{r+j+1}))]).$$

Таким образом, если $(y_n(s),\ t_n(s))$ — некоторое параметрическое представление $\Gamma_{x_n(t)}$, то найдутся точки $0 = s_0^{(n)} < s_1^{(n)} < \ldots < s_{in}^{(n)} = 1$, такие, что $|t_n'(s_i^{(n)}) - t(s_i)| < \varepsilon$ и $\rho(y_n(s_i^{(n)}),\ y(s_i)) < \varepsilon$. Пусть $\lambda(s)$ монотонная непрерывная функция, переводящая $[0, 1]$ на себя так, что $\lambda(s_i) = s_i^{(n)}$. Тогда $(y_n(\lambda(s)),\ t_n(\lambda(s)))$ будет также параметрическим представлением $\Gamma_{x_n(t)}$, причем будут выполняться, как не трудно подсчитать, следующие неравенства:

$$|t_n(\lambda(s)) - t(s)| < 2\varepsilon,\quad \rho(y_n(\lambda(s)),\ y(s)) < 4\varepsilon.$$

Этим и завершается доказательство.

2.5. Топология $\mathbf{J}_2$.

2.5.1. *Для того чтобы* $x_n(t) \xrightarrow{\mathbf{J}_2} x(t)$, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\lim_{c \to 0} \overline{\lim_{n \to \infty}} \Delta_{\mathbf{J}_2}[c;\ x_n(t), x(t)] = 0,$$

где $\Delta_{\mathbf{J}_2}(c;\ y(t),\ x(t)) = \sup_t [\min\{\rho(x(t_c),\ y(t)),\ \rho(y(t),\ x(t_c^*))\}]$ (t_c и t_c^* *определяются так же, как и ранее*).

Доказательство. Необходимость. Пусть $x_n(t) \xrightarrow{\mathbf{J}_2} x(t)$, тогда существует такая последовательность $\lambda_n(t)$, что

$$\lim_{n \to \infty} \sup_t \rho(x_n(t),\ x(\lambda_n(t)) = 0;\quad \lim_{n \to \infty} \sup_t |t - \lambda_n(t)| = 0. \tag{2.17}$$

Следовательно,

$$\rho(x(t_c), x_n(t)) \leqslant \rho(x(t_c), x(\lambda_n(t))) + \rho(x(\lambda_n(t)), x_n(t)),$$
$$\rho(x_n(t), x(t_c^*)) \leqslant \rho(x(\lambda_n(t)),\ x(t_c^*)) + \rho(x(\lambda_n(t)),\ x_n(t)).$$

Поэтому

$$\min\{\rho(x(t_c), x_n(t)),\ \rho(x_n(t)),\ x(t_c^*))\} \leqslant \rho(x(\lambda_n(t)),\ x_n(t)) + \\ + \min\{\rho(x(\lambda_n(t)),\ x(t_c));\ \rho(x(\lambda_n(t)),\ x(t_c^*))\}. \tag{2.18}$$

Ввиду (2.17) нам остается показать, что

$$\lim_{c \to 0} \overline{\lim_{n \to \infty}} \sup_t \min\{\rho(x(t_c), x(\lambda_n(t))); \rho(x(\lambda_n(t)),\ x(t_c^*))\}. \tag{2.19}$$

Но при $|\lambda_n(t)-t|<c$ у нас будет $t_c \leqslant \lambda_n(t) \leqslant t_c^*$ и, следовательно, (2.19) выполняется из-за 2.1.4.

Достаточность. Пусть существует такая последовательность $c_k \to 0$ и $n_k \to \infty$, что $\Delta_{J_2}(c_k;\ x_n(t), x(t)) < \varepsilon_k$ при $n > n_k$ и $\varepsilon_k \to 0$.

Обозначим через $t_1, t_2, \ldots, t_k$ точки, где размеры скачков $x(t)$ не менее ε. Окружим эти точки интервалами $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_k$ настолько малыми, что

$$\begin{aligned} &\rho(x(t),\ x(t_i-0)) < \varepsilon \quad \text{при } t < t_i,\ t \in \Delta_i, \\ &\rho(x(t),\ x(t_{i_k}+0)) < \varepsilon \quad \text{при } t > t_i,\ t \in \Delta_i. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Возьмем такое малое c_k, чтобы при $t \in [0,1] \setminus \bigcup_{i=1}^{k} \Delta_j$

$$\begin{aligned} &\rho(x_n(t),\ x(t_{c_k}-0)) < 2\varepsilon, \\ &\rho(x(t),\ x(t_{c_k}^*)) < 2\varepsilon. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Тогда для $n > n_k$ и $t \in \Delta_i$
либо

$$\rho(x_n(t),\ x(t_i-0)) < 3\varepsilon + \varepsilon_k, \tag{2.22}$$

либо

$$\rho(x_n(t),\ x(t_i+0)) < 3\varepsilon + \varepsilon_k.$$

Если $\rho(x(t_i-0),\ x(t_i+0)) \geqslant 6\varepsilon + \varepsilon_k$, то может быть выполнена лишь одна из возможностей (2.22). Построим теперь функцию $\lambda_n^{\varepsilon,\varepsilon_k}(t)$, отображающую отрезок $[0,1]$ на себя следующим образом: $\lambda_n^{\varepsilon,\varepsilon_k}(t) = t$ всюду, за исключением тех интервалов Δ_i, где $\rho(x(t_i-0, x(t_i+0)) \geqslant 6\varepsilon + 2\varepsilon_k$, а в этих интервалах $\lambda_n^{\varepsilon,\varepsilon_k}(t)$ отображает множество значений t, для которых $\rho(x_n(t),\ x(t_i-0)) < 3\varepsilon + \varepsilon_k$ во множество $t < t_i,\ t \in \Delta_i$, а множество значений t, для которого $\rho(x_n(t), x(t_i+0)) < 3\varepsilon + \varepsilon_k$ во множестве $t \geqslant t_i$, $t \in \Delta_i$. Очевидно, что $|\lambda_n^{\varepsilon,\varepsilon_k}(t) - t|$ не превосходит длины наибольшего из интервалов Δ_i, а $\rho(x_n(t),\ x(\lambda_n^{\varepsilon,\varepsilon_k}(t))) \leqslant 4\varepsilon + \varepsilon_k$ при $n > n_k$. Выбирая последовательности $\varepsilon \to 0$, $k \to \infty$ и $\delta = \{\max \text{ длин } \Delta_i\} \to 0$, мы и получим то, что нам нужно.

При доказательстве достаточности мы, как нетрудно заметить, доказали более сильное утверждение.

2.5.2. Для того, чтобы $x_n(t) \xrightarrow{J_2} x(t)$ достаточно, чтобы

$$\overline{\lim_{c \to 0}}\ \overline{\lim_{n \to \infty}}\ \Delta_{J_2}(c;\ x_n(t),\ x(t)) = 0.$$

2.5.3. Условие сходимости в топологии $\mathbf{J}_2$. *Для того, чтобы последовательность функций $x_n(t)$ $\mathbf{J}_2$-сходилась к $x(t)$, необходимо и достаточно, чтобы* а) $x_n(t)$ *сходилась к* $x(t)$ *на всюду плотном на* $[0,1]$ *множестве значений* t, *содержащем* 0 *и* 1; б) $\overline{\lim_{c \to 0}}\ \overline{\lim_{n \to \infty}}\ \Delta_{J_2}(c, x_n(t)) = 0$

$$\Delta_{J_2}(c, y(t)) = \sup_{t_c \leqslant t_1 \leqslant t_c + c/2,\ t \in [0,1],\ t_c^* - c/2 \leqslant t_2 \leqslant t_c^*} \min[\rho(y(t_1), y(t)); \rho(y(t), y(t_2))].$$

Доказательство. Необходимость условия б). Пусть $x_n(t) \xrightarrow{J_2} x(t)$. Тогда существует последовательность $\lambda_n(t)$ такая, что

$\sup_t |\lambda_n(t) - t|$ и $\sup_t \rho(x_n(t), x(\lambda_n(t)) \to 0$ при $n \to \infty$. Следовательно,

$$\rho(x_n(t_1), x_n(t)) \leqslant \rho(x(\lambda_n(t_1), x(\lambda_n(t))) + 2\sup_t \rho(x(\lambda_n(t)), x_n(t)),$$

$$\rho(x_n(t), x_n(t_2)) \leqslant \rho(x(\lambda_n(t), \lambda_n(t_2)) + 2\sup_t \rho(x(\lambda_n(t), x_n(t)).$$

Откуда:

$$\min[\rho(x_n(t_1), x_n(t)); \rho(x_n(t), x_n(t_2))] \leqslant 2\sup_t \rho(x_n(t), x(\lambda_n(t)) +$$
$$+ \min[\rho(x(\lambda_n(t_1)), x(\lambda_n(t))); \rho(x(\lambda_n(t)), x(\lambda_n(t_2)))].$$

При достаточно малых c и беря достаточно большое n, чтобы $|\lambda_n(t) - t| < c/2$, мы можем сделать выражение

$$\sup_{t_c^* \leqslant t_1 \leqslant t_c^* + c/2;\ t \in [0,1],\ t_c^* - c/2 \leqslant t_2 \leqslant t_c^*} \min[\rho(x(\lambda_n(t_1)), x(\lambda_n(t))); \rho(x(\lambda_n(t)), x(\lambda_n(t_2)))].$$

как угодно малым, так как, если $t \in [c, 1-c]$, то $\lambda_n(t_1) < \lambda_n(t) < \lambda_n(t_2)$ и $\lambda_n(t_2) - \lambda_n(t_1) < 3c$, значит, применимо 2.1.4; а при $t \leqslant c$ и $t \geqslant 1-c$ все величины $x(\lambda_n(t_1)), x(\lambda_n(t)), x(\lambda_n(t_2))$ выбором достаточно малого c могут быть сделаны как угодно близкими либо к $x(0)$, либо к $x(1)$. Необходимость доказана. Для доказательства достаточности мы докажем следующее более сильное утверждение

2.5.4. *Для того чтобы* $x_n(t) \xrightarrow{J_2} x(t)$, *достаточно, чтобы выполнялось условие* а) 2.5.3. *и* б')

$$\overline{\lim_{c \to 0}}\ \overline{\lim_{n \to \infty}}\ \Delta_{J_2}(c, x_n(t)) = 0.$$

Доказательство. Имеем

$$\rho(x(t_{c_k}), x_n(t)) \leqslant \rho(x(t_{c_k}),\ x(t') + \rho(x_n(t), x_n(t')) + \rho(x_n(t'), x(t')),$$

$$\rho(x_n(t), x(t_c^*)) \leqslant \rho(x_n(t), x_n(t'')) + \rho(x_n(t''), x(t'')) + \rho(x(t''), x(t_{c_k}^{*''})).$$

Так как $x_n(t)$ сходится к $x(t)$ на всюду плотном множестве, то для каждого t найдется $\overline{t}$ такая, что $|t - \overline{t}'| < \delta$ и при $n \to \infty$ $\rho(x_n(\overline{t}'), x(\overline{t}')) \to 0$ и, кроме того, $\rho(x(t), x(\overline{t}')) < \varepsilon$. Тогда, если $\delta < c_k/4$, то

$$\overline{\lim_{n \to \infty}}\ \Delta_{J_2}(c_k, x_n(t), x(t)) \leqslant \overline{\lim_{n \to \infty}} \Delta_{J_2}(c_k + \delta, x_n(t)) + 2\varepsilon.$$

Следовательно, если $\lim_{c_k \to 0}\ \overline{\lim_{n \to \infty}}\ \Delta_{J_2}(c, x_n(t)) = 0$, то и $\lim_{c \to 0}\ \overline{\lim_{n \to \infty}}\ \Delta_{J_2}(c,\ x_n(t),\ x(t)) = 0$, что и доказывает наше утверждение ввиду 2.5.2.

2.6. **Топологии J_1 и U.**

2.6.1. Условия сходимости в топологии J_1. *Для того, чтобы* $x_n(t) \xrightarrow{J_1} x(t)$, *необходимо и достаточно чтобы*

а) $x_n(t)$ *сходилась к* $x(t)$ *на всюду плотном множестве значений* t, *содержащем* 0 *и* 1;

б) $\lim_{c \to 0}\ \overline{\lim_{n \to \infty}}\ \Delta_{J_1}(c, x_n(t)) = 0$, *где*

$$\Delta_{J_1}(c, y(t)) = \sup_{t-c < t_1 < t \leqslant t_2 < t+c} \min[\rho(y(t_1), y(t); \rho(y(t), y(t_2))].$$

Доказательство. Необходимость условия б). Если $x_n(t) \xrightarrow{J_1} x(t)$, то существует последовательность монотонных непрерывных функций $\lambda_n(t)$, отображающих $[0,1]$ на себя, таких, что $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_t |\lambda_n(t) - t| = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_t \rho(x_n(t), x(\lambda_n(t))) = 0$. Тогда

$$\min[\rho(x_n(t_1), x_n(t)); \rho(x_n(t), x_n(t_2))] < 4\sup_t \rho(x_n(t), x(\lambda_n(t))) +$$
$$+ \min[\rho(x(\lambda_n(t_1)), x(\lambda_n(t))); \rho(x(\lambda_n(t)), x(\lambda_n(t_2)))],$$

а так как $\lambda_n(t_1) < \lambda_n(t) < \lambda_n(t_2)$ и при $c \to 0$ и $n \to \infty$ $\lambda_n(t_2) - \lambda_n(t_1)$ становится как угодно малым, то $\Delta_{J_1}(c, x_n(t))$ стремится к нулю при $n \to \infty$ и $c \to 0$.

Достаточность. Пусть выполняются а) и б). Нам нужно построить последовательность монотонных функций $\lambda_n(t)$, отображающих $[0,1]$ на себя так, чтобы $\sup\limits_t \rho(x_n(t), x(\lambda_n(t))) \to 0$ и $|\lambda_n(t) - t| \to 0$ при $n \to \infty$. Для этого достаточно построить такие непрерывные монотонные функции $\lambda_n^\varepsilon(t)$, отображающие $[0,1]$ на себя, что для $n > n_\varepsilon$, $\rho(x_n(t), x(\lambda_n^\varepsilon(t))) < \varepsilon$ и $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} |\lambda_n^\varepsilon(t) - t| = 0$. Займемся построением таких функций.

Пусть точки $t_1, t_2, \ldots, t_k$ все те точки, где размеры скачков $x(t)$ не менее μ. Выберем такие c и N', чтобы для $n > N'$

$$\Delta_{J_1}(c, x_n(t)) < \mu. \tag{2.23}$$

Далее, пусть это c будет настолько мало, что если t' и t'' принадлежат одному из интервалов $(0, t_1), (t_1, t_2), \ldots, (t_k, 1)$, то $\rho(x(t'), x(t'')) < \mu$ как только $|t' - t''| < c$. Из того, что $x_n(t)$ сходится к $x(t)$ на всюду плотном множестве, следует, что существуют точки $0 = \tau_0^{(c)} < \tau_1^{(c)} < \tau_2^{(c)} < \ldots$ $\ldots < \tau_m^{(c)} = 1$ такие, что $\tau^{(c)} - \tau_{i-1}^{(c)} < c/2$ $(i = 2, \ldots, m)$ и $\rho(x_n(\tau_i^{(c)}), x(\tau_i^{(c)})) < \mu$ для $n > N''$. Пусть точка t_l лежит между точками $\tau_{i_l}^{(c)}$ и $\tau_{i_l+1}^{(c)}$. Тогда, если разрыв в точке t_l больше 8μ, то $\rho(x(\tau_{i_l}^{(c)}), x(\tau_{i_l+1}^{(c)})) > 6\mu$, а следовательно, $\rho(x_n(\tau_{i_l}^{(c)}), x_n(\tau_{i_l+1}^{(c)})) > 4\mu$ для $n > N''$. Но для $n > \max\{N', N''\}$ и $t \in (\tau_{i_l}^{(c)}, \tau_{i_l+1}^{(c)})$ $\min\{\rho(x_n(\tau_{i_l}^{(c)}), x_n(t)); \rho(x_n(\tau_{i_l+1}^{(c)}), x_n(t))\} < \mu$. Поэтому в интервале $(\tau_{i_l}^{(c)}, \tau_{i_l+1}^{(c)})$ найдется точка $\bar{t}_l$ такая, что при $t \in (\tau_{i_l}^{(c)}, \bar{t}_l)$ $\rho(x_n(\tau_{i_l}^{(c)}), x_n(t)) < \mu$, а при $t \in (\bar{t}_l, \tau_{i_l+1}^{(c)})$ $\rho(x_n(t), x_n(\tau_{i_l+1}^{(c)})) < \mu$. (Если бы это было не так, то нашлись бы точки $t_1' < t_2' < t_3' \in (\tau_{i_l}^{(c)}, \tau_{i_l+1}^{(c)})$ такие, что $\rho(x_n(t_1'), x(\tau_{i_l}^{(c)})) < \mu$, $\rho(x_n(t_1'), x_n(\tau_{i_l+1}^{(c)})) < \mu$, $\rho(x_n(t_3'), x(\tau_{i_l}^{(c)})) < \mu$, т. е. $\rho(x_n(t_1'), x_n(t_2')) > 2\mu$, и $\rho(x_n(t_2'), x_n(t_3')) > 2\mu$, что невозможно из-за (2.23).

Пусть теперь $t_{k_1}, t_{k_2}, \ldots, t_{k_r}$ — точки, где размеры разрывов превосходят 8μ, а точки $\bar{t}_{k_i}$ построены для t_{k_c} соответственно точно так же, как $\bar{t}_l$ для t_l. Обозначим через $\lambda_n^\varepsilon(t)$ непрерывную монотонную на каждом из интервалов $(0, t_{k_1}), (t_{k_1}, t_{k_2}), \ldots, (t_{k_r}, 1)$ функцию, имеющую вид

$$\lambda_n^\varepsilon(t) = a_i t + b_i, \quad \lambda_n^\varepsilon(t_{k_i}) = \bar{t}_{k_i}.$$

Очевидно $|\lambda_n^\varepsilon(t) - t| < c/2$. Оценим $\rho(x_n(t), x(\lambda_n(t)))$ для $t \in (\tau_j^{(c)}, \tau_{j+1}^{(c)})$. Если в этом интервале нет ни одной точки $\bar{t}_{k_i}$ (а значит, и t_{k_i}), то

$$\rho(x_n(t), x(\lambda_n^\varepsilon(t))) \leqslant \mu + \min\{\rho(x_n(t), x_n(\tau_j^{(c)})); \rho(x_n(t)), x(\tau_{j+1}^{(c)}))\} +$$
$$+ \max\{\rho(x(\lambda_n^\varepsilon(t), x(\tau_j^{(c)})); \rho(x(\lambda_n^\varepsilon(t)), x(\tau_{j+1}^{(c)}))\} < 12\mu.$$

Если же $t \in (\tau_j^{(c)}, \tau_{j+1}^{(c)})$ и t_{k_ν} и $\overline{t}_{k_\nu}$ также принадлежит $(\tau_j^{(c)}, \tau_{j+1}^{(c)})$, то либо $t \in (\tau_j^{(c)}, t_{k_\nu})$, $\lambda_n^\varepsilon(t) < \overline{t}_{k_\nu}$, либо $t \in (\overline{t}_{k_\nu}, \tau_{j+1}^{(c)})$, $\lambda_n^\varepsilon(t) > \overline{t}_{k_\nu}$, значит $\rho(x_n(t), \lambda_n^\varepsilon(t)) < 3\mu$. Если положить $\varepsilon = 12\mu$, мы и получим требуемое.

2.6.2. Условия сходимости в топологии U. *Для того, чтобы* $x_n(t) \xrightarrow{U} x(t)$, *необходимо и достаточно, чтобы*

а) $x_n(t) \xrightarrow{J_1} x(t)$;

б) *если через* $t_1, t_2, \ldots, t_k$ *обозначить точки, где размеры скачков* $x(t)$ *превосходят* ε, *а* ε *любое такое, что у* $x(t)$ *нет скачков размера* ε; *через* $t_1^{(n)}, t_2^{(n)}, \ldots, t_{k_n}^{(n)}$ *обозначить точки, где размеры скачков* $x_n(t)$ *превосходят* ε, *то, начиная с некоторого* n, $k_n = k$, $t_i = t_i^{(n)}$.

Необходимость обоих условий очевидна. Достаточность получается, если заметить, что при построении функции $\lambda_n^\varepsilon(t)$ (см. доказательство достаточности 2.6.1.) в нашем случае получится

$$\lambda_n^\varepsilon(t) = t.$$

2.7. Условия компактности в топологиях J_1, J_2, M_1, M_2. Отметим следующее необходимое условие компактности:

2.7.1. *Для того чтобы множество функций* $K \subset K_X$ *было компактным в какой-либо из топологий* J_1, J_2, M_1, M_2 *необходимо, чтобы значения* $x(t)$ *при всех* $t \in [0, 1]$ *и* $x(t) \in K_X$ *принадлежали одному и тому же компактному множеству* A *из* X.

Действительно, если имеется последовательность точек $x_k(t_k)$, то, выбирая такую подпоследовательность n_k, чтобы $x_{n_k}(t) \xrightarrow{M_2} x_0(t)$, $t_{n_k} \to t_0$, мы получим, что расстояние между $x_{n_k}(t_{n_k})$ и отрезком $[x_0(t_0 - 0), x_0(t_0)]$ стремится к нулю, а значит $x_{n_k}(t_{n_k})$ компактно, так как отрезок компактен.

2.7.2. Достаточное условие компактности. Множество функций K компактно в топологии S, где S обозначает одну из топологий J_1, J_2, M_1, M_2, если выполнено условие 2.7.1. и

$$\lim_{c \to 0} \limsup_{x(t) \in K} (\Delta_S(c, x(t)) + \sup_{0 < t < c} \rho(x(0), x(t)) + \sup_{1-c < t < 1} \rho(x(1), x(t))) = 0 \quad (2.24)$$

(limsup некоторого числового множества — его максимальная предельная точка).

Доказательство. Взяв некоторое всюду плотное множество N значений t, содержащее 0 и 1, мы из любой последовательности $x_n(t)$ можем выбрать подпоследовательность $x_{n_k}(t)$ такую, чтобы для $t \in N$ существовал $\lim_{n_k \to \infty} x_{n_k}(t)$. Так как $\Delta_{M_2}(c, x(t)) \leqslant \Delta_S(c, x(t))$, то

$$\lim_{c \to 0} \overline{\lim_{n_k \to \infty}} (\Delta_{M_2}(c, x_{n_k}(t)) + \sup_{0 < t < c} \rho(x(0), x(t)) + \sup_{1-c < t < 1} \rho(x(1), x(t))) = 0.$$

Поэтому, на основании 2.3.5, существует $\overline{x}(t) \in K_X$ такая, что $x_{n_k}(t) \xrightarrow{M_2} \overline{x}(t)$. Значит $x_{n_k}(t)$ сходится к $\overline{x}(t)$ на всюду плотном множестве значений, содержащем 0 и 1 и, кроме того, выполняется (2.24), значит $x_{n_k}(t) \xrightarrow{S} \overline{x}(t)$.

Принимая во внимание, что $\Delta_{J_1}(c, x(t))$ и $\Delta_{M_1}(c, x(t))$ являются монотонными функциями c, легко получить следующее:

2.7.3. Необходимое и достаточное условие компактности в топологиях J_1, M_1 * Пусть S_2 обозначает одну из топологий J_1 или M_1. Условия 2.7.1 и

$$\lim_{c \to 0} \sup_{x(t) \in K} (\Delta_{S_1}(c, x(t)) + \sup_{0 < t < c} \rho(x(0), x(t)) + \sup_{1-c < t < 1} \rho(x(1), x(t))) = 0$$

* Условия компактности в топологии J_1 были найдены А. Н. Колмогоровым.

необходимы и достаточны для компактности K в топологии S_1. Нижеследующий пример показывает, что условие (2.24) не является необходимым ни для $\mathbf{J}_2$, ни для M_2.

2.7.4. Пример. Множество K состоит из функций $x_s(t)$, $s \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$, а

$$x_s(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant t < s, \\ 1, & s \leqslant t < 1/4 + s/2, \\ 0, & 1/4 + s/2 \leqslant t < 1/2, \\ 1, & 1/2 \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Это множество является $\mathbf{J}_2$-, а следовательно и M_2-компактным, но

$$\lim_S \sup \Delta_{\mathbf{J}_2}(c, x_s(t)) = 1,$$

$$\lim_S \sup \Delta_{M_2}(c, x_s(t)) = 1 \quad \text{при } c < 1/2.$$

2.8. Одно неравенство. Оно вряд ли имеет самостоятельное значение и понадобится лишь при доказательстве предельных теорем.

Обозначим

$$R(\delta, x(t), y(t)) = \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1-\delta} \inf_{t \leqslant t_1 \leqslant t+\delta} \rho(x(t), y(t));$$

$$\overline{R}(\delta, x(t), y(t)) = \max\{\rho(x(0), y(0)); \rho(x(1), y(1)); R(\delta, x(t), y(t))\}.$$

Далее

$$k(c, x(t)) = \max\{\sup_{0 \leqslant t \leqslant c} \rho(x(0), x(t)); \sup_{1-c \leqslant t \leqslant 1} \rho(x(1), x(t))\}.$$

Тогда для $\bar{c} < c/4$ справедливо неравенство:

$$\Delta_S(c, y(t)) \leqslant L(\overline{R}(\alpha\bar{c}, x(t), y(t)) + \Delta_{\mathbf{J}_1}(3c, x(t)) + k(2c, x(t)) + \Delta_S(\bar{c}, y(t))),$$

здесь S обозначает одну из топологий M_2, M_1, $\mathbf{J}_2$, $\mathbf{J}_1$, а L, и $\alpha < 1$ — некоторые абсолютные постоянные.

Приведем доказательство для случая топологии M_2. Отметим два свойства величины $\Delta_{\mathbf{J}_1}(c, x(t))$: 1) на отрезке длины c функция $x(t)$ не может иметь двух скачков величины более $2\Delta_{\mathbf{J}_1}(c, x(t))$; 2) на отрезке длины c могут существовать две точки t_1 и t_2 такие, что $\rho(x(t_1), x(t_2)) > 4\Delta_{\mathbf{J}_1}(c, x(t))$, лишь в том случае, если существует $t_1 < t^* < t$ такая, что $\rho(x(t^* - 0), x(t^* + 0)) > 2\Delta_{\mathbf{J}_1}(c, x(t))$. Будем оценивать теперь $H(y(t_1), y(t_2), y(t_3))$, где $t_1 \in [t_{2c}, t_{2c} + c/2]$ $t_3 \in [t^*_{2c} - c/2, t^*_{2\varepsilon}]$. Если $t \in [c, 1-c]$, то существуют точки t'_i, t''_i, $i = 1, 2, 3$ $t'_i \in \left[t_{i\bar{c}}, t_{i\bar{c}} + \frac{\bar{c}}{2}\right]$; $t''_i \in \left[t^*_{i\bar{c}} - \frac{\bar{c}}{2}, t^*_{i\bar{c}}\right]$ такие, что $\rho(x(t'_i), y(t'_i))$ и $\rho(x(t''_i), y(t''_i))$ меньше $\overline{R}\left(\frac{1}{2}\bar{c}, x(t), y(t)\right)$. Если в (t'_2, t''_2) функция $x(t)$ имеет скачок размера более $2\Delta_{\mathbf{J}_1}(2c, x(t))$, то $\rho(x(t'_1), x(t'_2))$ и $\rho(x(t''_2), x(t'_2)) < 4\Delta_{\mathbf{J}_1}(2c, x(t))$, а значит

$$\rho(y(t_1), y(t'_2) < \Delta_{M_2}(\bar{c}, y(t)) + 2\overline{R}(\bar{c}/2, x(t), y(t)) + 4\Delta_{\mathbf{J}_1}(2c, x(t))$$

аналогично, $\rho(y(t_3), y(t''_2) < \Delta_{M_2}(\bar{c}, y(t)) + 2\overline{R}(\bar{c}/2, x(t), y(t)) + 4\Delta_{\mathbf{J}_1}(2c, x(t))$. Поэтому (2.25)

$$H(y(t_1), y(t_2), y(t_3)) < 2\Delta_{M_2}(\bar{c}, y(t)) + 2\bar{R}(c/2, x(t), y(t)) + 4\Delta_{\mathbf{J}_1}(2c, x(t)).$$

Если же в (t_2', t_2'') $x(t)$ не имеет скачка размера более $2\Delta_{J_1}(2c, x(t))$, то либо $\rho(x(t_1'), x(t_2')) < 4\Delta_{J_1}(2c, x(t))$; $\rho(x(t_1''), x(t_2'')) < 4\Delta_{J_1}(2c, x(t))$, а значит

$$\rho(y(t_1), y(t_3)) < 2\Delta_{M_2}(\overline{c}, y(t)) + 2\overline{R}(\overline{c}/2, x(t), y(t)) + 4\Delta_{J_1}(2c, x(t));$$

либо

$$\rho(y(t_3'), x(t_2')) < 4\Delta_{J_1}(2c, x(t)), \quad \rho(x(t_3''), x(t_2'')) < 4\Delta_{J_1}(2c, x(t))$$

а значит,

$$\rho(y(t_2), y(t_3)) < 2\Delta_{M_2}(\overline{c}, y(t)) + \overline{R}\left(\frac{\overline{c}}{2}, x(t), y(t)\right) + 4\Delta_{J_1}(2c, x(t)),$$

так что оценка (2.25) сохраняется. Пусть $t_2 < c$. Тогда

$$\rho(y(t_2), x(0) < \Delta_{M_2}(\overline{c}, y(t)) + \overline{R}(\overline{c}/2, x(t), y(t)) + k(c, x(t)),$$

следовательно,

$$\rho(y(t_1), y(t_2)) < 2\Delta_{M_2}(\overline{c}, y(t)) + 2\overline{R}(c/2, x(t), y(t)) + 2k(c, x(t)).$$

Случай $1 - c < t_2 < 1$ совершенно аналогичен.

§ 3. Основные предельные теоремы

Мы будем рассматривать случайные процессы $\xi(t)$, заданные на временном промежутке $[0, 1]$ и принимающие значения из некоторого полного метрического сепарабельного пространства X. Это значит, что имеется некоторое пространство Ω элементарных исходов ω с вероятностной мерой P на Ω, и мы рассматриваем функции $\xi(t, \omega)$, определенные для $t \in [0, 1]$ и почти для всех по мере P $\omega \in \Omega$ и принимающие значения из X. Функция $\xi(t, \omega)$ измерима по мере P при каждом фиксированном t, т. е. для любого борелевского множества $A \subset X$ множество тех ω, для которых $\xi(t, \omega) \in A$, является P-измеримым множеством. Вероятности $\mathbf{P}\{\xi(t_1) \in A_1; \xi(t_2) \in A_2, \ldots; \xi(t_k) \in A_k\}$ (A_i — борелевские множества из X) называются конечномерными распределениями процесса $\xi(t, \omega)$. Мы будем говорить, как это обычно принято, что конечномерные распределения процессов $\xi_n(t, \omega)$ сходятся к конечномерным распределениям процесса $\xi(t)$, если

$$\mathbf{P}\{\xi_n(t_1) \in A_1; \xi_n(t_2) \in A_2; \ldots; \xi_n(t_k) \in A_k\} \to$$
$$\to \mathbf{P}\{\xi(t_1) \in A_1; \xi(t_2) \in A_2; \ldots; \xi(t_k) \in A_k\}$$

для любого k, любого набора $t_1, t_2, \ldots, t_k \in [0, 1]$ и всех наборов борелевских множеств $A_1, A_2, \ldots, A_k$, для которых

$$\mathbf{P}\{\xi(t_i) \in \overline{A_i} \setminus \overline{X \setminus A_i}\} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, k).$$

В дальнейшем мы будем, ничего этого специально не оговаривая, рассматривать лишь такие процессы $\xi(t, \omega)$, для которых почти для всех ω (с вероятностью 1) $\xi(t, \omega) \in K_X$.

При обозначении процесса мы будем писать $\xi(t, \omega)$ лишь тогда, когда Ω — какое-нибудь конкретное пространство, а в остальных случаях будем писать просто $\xi(t)$.

3.1. Пусть у нас имеется последовательность случайных величин ξ_n со значениями из X, сходящихся по вероятности к некоторой случайной величине ξ, т. е. такая, что

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\{\rho(\xi_n, \xi) > \varepsilon\} = 0 \quad \text{для любого } \varepsilon.$$

Тогда, как нетрудно видеть, распределение величины ξ_n слабо сходится к распределению величины ξ. Обратное утверждение, конечно, неверно, так как величины ξ_n и ξ могут быть заданы даже на различных пространствах элементарных исходов. Но все-таки мы сейчас докажем нечто подобное обратному утверждению.

3.1.1. *Пусть распределения величин ξ_n слабо сходятся к распределению величины ξ_0. Тогда существуют случайные величины $x_n(\omega)$; $n = 0, 1, \ldots$, такие, что*

$$P\{\xi_n \in A\} = P\{x_n(\omega) \in A\}, \quad n = 0, 1, \ldots$$
$$\text{и } P\{x_n(\omega) \to x_0(\omega), n \to \infty\} = 1.$$

(Ω — *отрезок* $[0, 1]$, *а* P — *обычная лебегова мера*).

Доказательство. Выберем борелевские множества $S_{i_1, i_2, \ldots, i_k} \subset X$, где k, $i_1, i_2, \ldots, i_k$ пробегают все натуральные числа, так, чтобы выполнялись свойства:

1) $S_{i_1, i_2, \ldots, i_k}$ и $S_{i'_1, i'_2, \ldots, i'_k}$ не пересекаются при $i_k \neq i'_k$
2) $\bigcup_{i_k=1}^{\infty} S_{i_1, i_2, \ldots, i_{k-1}, i_k} = S_{i_1, i_2, \ldots, i_{k-1}}$; $\bigcup_{i_1=1}^{\infty} S_{i_1} = X$;
3) диаметр $S_{i_1, i_2, \ldots, i_k}$ не превосходит $(1/2)^k$;
4) $\mathbf{P}\{\xi_0 \in \overline{S_{i_1, i_2, \ldots, i_k}} \cap \overline{X \setminus S_{i_1, i_2, \ldots, i_k}}\} = 0$.

Множества $S_{i_1, i_2, \ldots, i_k}$ можно построить следующим образом: пусть $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots$ такая последовательность точек, что каждая точка из X находится на расстоянии, не превосходящем $(1/2)^{k+1}$ хотя бы от одной точки нашей последовательности; обозначим через $S'_r(x_i^{(k)})$ множество таких точек x, что $\rho(x, x_i^{(k)}) < r$, можно выбрать такое r_k, $(1/2)^{k+1} < r_k < (1/2)^k$, чтобы

$$\mathbf{P}\{\xi_0 \in \overline{S'_{r_k}(x_i^{(k)})} \cap \overline{X \setminus S'_{r_k}(x_i^{(k)})}\} = 0 \quad \text{для всех } i, \tag{3.1}$$

так как таких r, где (3.1) положительно хотя бы при одном i не более чем счетное число. Положим

$$D_i^k = S'_{r_k}(x_i^{(k)}) \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} S'_{r_k}(x_i^k);$$

$$S_{i_1, i_2, \ldots, i_k} = D_{i_1}^1 \cap D_{i_2}^2 \cap \ldots \cap D_{i_k}^k.$$

Обозначим через $\Delta^{(n)}_{i_1, i_2, \ldots, i_k}$ интервалы отрезка $[0, 1]$, определяемые следующим образом: интервалы $\Delta^{(n)}_{i_1, \ldots, i_k}$ и $\Delta^{(n)}_{i'_1, \ldots, i'_k}$ не пересекаются при $i_k \neq i'_k$, причем $\Delta^{(n)}_{i_1, i_2, \ldots, i_k}$ лежит левее $\Delta^{(n)}_{i'_1, i'_2, \ldots, i'_k}$, если существует такое r, что $i_j = i'_j$ для $j = 1, 2, \ldots, r-1$ и $i_r < i'_r$; длина интервала $\Delta^{(n)}_{i_1, i_2, \ldots, i_k}$ равна $\mathbf{P}\{\xi_n \in S_{i_1, i_2, \ldots, i_k}\}$. Выберем в каждом множестве $S_{i_1, i_2, \ldots, i_k}$

по одной точке $\bar{x}_{i_1, i_2, \ldots, i_k}$. Определим функции $x_n^m(\omega)$ для $\omega \in [0,1]$ следующим образом:

$$x_n^m(\omega) = \bar{x}_{i_1, i_2, \ldots, i_m} \text{ при } \omega \in \Delta^{(n)}_{i_1, i_2, \ldots, i_m}.$$

Нетрудно видеть, что $\rho(x_n^m(\omega), x_n^{m+p}(\psi)) \leqslant (1/2)^m$ и, так как X — полное пространство, существует предел $x_n(\omega) = \lim\limits_{m\to\infty} x_n^m(\omega)$. Поскольку длина интервала $\Delta^{(n)}_{i_1, i_2, \ldots, i_m}$ стремится к длине интервала $\Delta^{(0)}_{i_1, i_2, \ldots, i_m}$, то для всех внутренних точек интервалов $\Delta^{(0)}_{i_1, i_2, \ldots, i_m}$

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_0(\omega), x_n(\omega)) \leqslant (1/2)^{m-1},$$

и, следовательно, для всех ω, за исключением, быть может, счетного числа, $x_n(\omega) \to x_0(\omega)$.

Остается проверить, что величины $x_n(\omega)$ и ξ_n имеют одинаковые распределения. Для этого достаточно, например, показать, что $\mathbf{P}\{x_n(\omega) \in A\} = \mathbf{P}\{\xi_n \in A\}$ для таких A, для которых

$$\mathbf{P}\{\xi_n \in \bar{A} \cap \overline{X \setminus A}\} = 0.$$

Пусть A такое множество. Обозначим через $A^{(m)}$ сумму $S_{i_1, i_2, \ldots, i_m}$, принадлежащих A, а через $A'^{(m)}$ сумму $S_{i_1, i_2, \ldots, i_m}$, не принадлежащих $X \setminus A$. Очевидно, что $A^{(m)} \subset A \subset A'^{(m)}$ и

$$\mathbf{P}\{x_n(\omega) \in A^{(m)}\} = P\{\xi_n \in A^{(m)}\};\ \mathbf{P}\{x_n(\omega) \in A'^{(m)}\} = \mathbf{P}\{\xi_n \in A'^{(m)}\}. \quad (3.2)$$

Далее, если через $C^{(m)}$ обозначим множество точек, расстояние которых от $\bar{A} \cap \overline{X \setminus A}$ не превосходит $(1/2)^m$, то $A'^{(m)} \setminus A^{(m)} \subset C^{(m)}$, и так как $\mathbf{P}\{\xi_n \in \bar{A} \cap \overline{X \setminus A}\} = 0$, то $\mathbf{P}\{\xi_n \in A'^{(m)} \setminus A^{(m)}\} \to 0$ при $m \to \infty$. Это наряду с (3.2) и доказывает наше утверждение.

На основании только что доказанного можно получить такое следствие для последовательностей процессов:

3.1.2. *Пусть для последовательности процессов $\xi_n(t)$, траектории которых с вероятностью 1 принадлежат K_X, конечномерные распределения $\xi_n(t)$ сходятся к конечномерным распределениям $\xi_0(t)$. Тогда можно построить такие процессы $x_n(t, \omega)$, $n = 0, 1, \ldots$, (Ω — отрезок $[0,1]$, P — мера Лебега на этом отрезке), что конечномерные распределения $x_n(t, \omega)$ и $\xi_n(t)$ совпадают, $x_n(t, \omega) \in K_X$ почти при всех $\omega \in [0,1]$, и $x_n(t, \omega) \to x(t, \omega)$ почти при всех ω и для всех t, принадлежащих некоторому счетному множеству N, всюду плотному на $[0,1]$, выбор которого находится в нашем распоряжении.*

Действительно, пусть $N = \{t^1, t^2, \ldots\}$ — некоторое всюду плотное множество. Обозначим через $X^{(\infty)}$ пространство последовательностей $(x_1, x_2, \ldots)$, где $x_i \in X$. Введем в $X^{(\infty)}$ метрику $\rho^{(\infty)}$

$$\rho^{(\infty)}[(x_1, x_2, \ldots), (y_1, y_2, \ldots)] = \sum_{k=1}^{\infty} (1 - e^{-\rho(x_k, y_k)}) \frac{1}{k!}.$$

С такой метрикой $X^{(\infty)}$ будет полным метрическим сепарабельным пространством. Рассмотрим в $X^{(\infty)}$ случайные величины

$$\xi_n = \{\xi_n(t^1), \xi_n(t^2), \ldots\}.$$

Легко проверить, что распределения величин ξ_n слабо сходятся к распределению величины ξ_0. Следовательно, можно построить функции $x_n^{(\infty)}(\omega)$ со значениями из $X^{(\infty)}$, определенные для $\omega \in [0,1]$ так, что $x_n^{(\infty)}(\omega) \to x_0^{(\infty)}(\omega)$ с вероятностью 1 и распределения $x_n^{(\infty)}(\omega)$ и ξ_n совпадают.

Пусть $x_n^{(\infty)}(\omega) = (x_1^{(n)}(\omega), x_2^{(n)}(\omega), \ldots)$ Положим

$$x_n(t^i, \omega) = x_i^{(n)}(\omega).$$

Так как совместные распределения $x_n(t^i, \omega)$ и $\xi_n(t^i)$ совпадают, то почти наверное существует предел

$$x_n(t, \omega) = \lim_{\substack{t^j \to t \\ t^j > t}} x_n(t^j, \omega). \tag{3.3}$$

Функции $x_n(t, \omega)$ будут искомыми. То, что они с вероятностью 1 принадлежат K_X, следует из того, что совместные распределения $x_n(t^j, \omega)$ и $\xi_n(t^j)$ совпадают и из (3.3). По самому построению $x_n(t^j, \omega) \to x_0(t^j, \omega)$ с вероятностью 1.

Очевидно, что нам не нужно было, чтобы конечномерные распределения $\xi_n(t)$ сходились к конечномерным распределениям $\xi(t)$ при всех t, достаточно было, чтобы это выполнялось для t из N.

3.2. Если мы припомним условия сходимости в топологиях $\mathbf{J}_1$, $\mathbf{J}_2$, M_1, M_2 и свяжем эти условия с только что полученными результатами, то сразу убедим путь, которым могут быть получены интересующие нас предельные теоремы.

Пусть S обозначает одну из топологий $\mathbf{J}_1, \mathbf{J}_2, M_1, M_2$. Обозначим через F некоторое метрическое сепарабельное пространство, а через F_S —совокупность всех функций $f[x(t)]$, определенных на K_X, принимающих значения из F и непрерывных в топологии S.

3.2.1. **Теорема.** *Для того чтобы для любой $f \in F_S$ распределение $f[\xi_n(t)]$ при $n \to \infty$ слабо сходились к распределению $f[\xi_0(t)]$, достаточно чтобы*

а) *конечномерные распределения $\xi_n(t)$ сходились к конечномерным распределениям ξ_0 при t, принадлежащем некоторому множеству N, всюду плотному на $[0,1]$ и содержащему 0 и 1;*

б) $\lim\limits_{c \to 0} \overline{\lim\limits_{n \to \infty}} \mathbf{P}\{\Delta_S(c, \xi_n(t)) > \varepsilon\} = 0$ *при всех* ε.

Доказательство. Если выполнено условие а), то можно построить последовательность $x_n(t, \omega)$ такую, что $x_n(t, \omega)$ с вероятностью 1 сходится к $x_0(t, \omega)$ при $x \to \infty$ и $x_n(t, \omega)$ имеет те же конечномерные распределения, что и $\xi_n(t)$, а значит распределения $f[\xi_n(t)]$ и $f[x_n(t, \omega)]$ совпадают. Для доказательства нам достаточно показать, что $f[x_n(t, \omega)] \to f[x_0(t, \omega)]$ по вероятности. Из условия б) получаем, что можно выбрать последовательности $c_k \to 0$, $n_k \to \infty$ и $\varepsilon_k \to 0$ такие, что для $n > n_k$ $\mathbf{P}\{\Delta_S(c_k, \xi_n(t)) > \varepsilon_k\} < 1/k^2$, а значит и

$$\mathbf{P}\{\Delta_S(c_k, x_n(t, \omega)) > \varepsilon_k\} < 1/k^2. \tag{3.4}$$

Рассмотрим подпоследовательность m_k такую, что $m_k > n_k$, и

$$\mathbf{P}\{\overline{R}(\alpha c_k, x_{m_k}(t,\omega), x_0(t,\omega)) > \varepsilon_k\} < 1/k^2. \tag{3.5}$$

Из неравенства 2.8 находим (см. 2.8.1)

$$\Delta_S(c, x_{m_k}(t,\omega)) \leqslant L[\Delta_S(c_k; x_{m_k}(t,\omega)) + \overline{R}(\alpha c_k, x_{m_k}(t,\omega), x_0(t,\omega)) + k(2c, x_0(t,\omega)) + \Delta_{J_1}(2c, x(t,\omega))].$$

Так как $\Delta_S(c_k, x_{m_k}(t,\omega))$ и $\overline{R}(\alpha c_k, x_{m_k}(t,\omega))$ с вероятностью 1 стремятся к нулю (это следует из (3.4) и 3,5)), то

$$\mathbf{P}\{\overline{\lim_{n\to\infty}} \Delta_S(c, x_{m_k}(t,\omega)) > \varepsilon\} \leqslant \mathbf{P}\left\{k(2c, x_0(t,\omega)) + \Delta_{J_1}(2c, x_0(t,\omega)) > \frac{\varepsilon}{2L}\right\}. \tag{3.6}$$

Из того же, что $x_0(t,\omega) \in K_X$ с вероятностью 1, следует, что

$$\mathbf{P}\left\{\lim_{c\to 0} k(2c, x_0(t,\omega)) = 0\right\} = 1$$

и

$$\mathbf{P}\left\{\lim_{c\to 0} \Delta_{J_1}(2c, x_0(t,\omega)) = 0\right\} = 1.$$

Поэтому

$$\mathbf{P}\left\{\lim_{c\to 0} \overline{\lim_{n\to\infty}} \Delta_{J_1}(2c, x_{m_k}(t,\omega)) = 0\right\} = 1;\ \mathbf{P}\{x_{m_k}(t,\omega) \xrightarrow{S} x_0(t,\omega)\} = 1,$$

а значит и

$$\mathbf{P}\left\{\lim_{m_k\to\infty} x_{m_k}(t,\omega) = x_0(t,\omega)\right\} = 1.$$

Другими словами, какую бы мы ни взяли последовательность величин $f[x_{n_k}(t,\omega)]$, в ней всегда найдется подпоследовательность $f[x_{m_k}(t,\omega)]$ такая, что $\mathbf{P}\{f[x_{m_k}(t,\omega)] \to f[x_0(t,\omega)]\} = 1$. А это и означает, что $f[x_n(t,\omega)]$ сходится к $f[x_0(t,\omega)]$ по вероятности. Теорема доказана.

Легко видеть, что условия а) и б) теоремы 3.2.1. не при всяком пространстве F являются необходимыми. (Если F, например, состоит всего из одной точки, то распределения всех $f[\xi_n(t)]$ совпадают.) Если F — дискретное пространство, то условия а) и б) тоже не являются необходимыми).

Оказывается, что эти условия являются необходимыми, если в пространстве F есть подмножество, которое можно непрерывно отобразить в отрезок прямой. Это следует из следующего утверждения:

3.2.2. **Теорема.** *Если для любого непрерывного ограниченного функционала $f[x(t)]$ (функционалами мы называем числовые функции, т. е. в этом случае X — вещественная прямая), непрерывного в топологии S, распределение $f[\xi_n(t)]$ слабо сходится к распределению $f_0[\xi_0(t)]$, то*

а) *конечномерные распределения $\xi_n(t)$ сходятся к конечномерным распределениям $\xi_0(t)$ для t, принадлежащих некоторому множеству N, всюду плотному на $[0,1]$ и содержащему 0 и 1;*

б) $\lim\limits_{c\to 0} \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \mathbf{P}\{\Delta_S(c, \xi_n(t)) > \varepsilon\} = 0$ *при всяком* ε.

Для доказательства утверждения а) покажем, что если точки $t_1, t_2, \ldots, t_k$ являются точками стохастической непрерывности $\xi_0(t)$ (т. е. $\xi_0(t)$

сходятся по вероятности к $\xi_0(t_i)$ при $t \to t_i$, $i = 1, \ldots, k$), а множества $A_1, A_2, \ldots, A_k \subset X$ такие, что $\mathbf{P}\{\xi_0(t_i) \in \overline{A_i} \cap \overline{X \setminus A_i}\} = 0$, $i = 1, 2, \ldots, k$, то

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\{\xi_n(t_i) \in A_i;\ i = 1, 2, \ldots, k\} = \mathbf{P}\{\xi_0(t_i) \in A_i;\ i = 1, 2, \ldots, k\}. \quad (3.7)$$

Для этой цели рассмотрим функционалы

$$f_\varepsilon^*[x(t)] = \sum_{i=1}^{k} \sup_t g_{t_i,\delta}(t)\,[\lambda(A_i^\varepsilon, x(t)) + 1]/[\lambda(A_i^\varepsilon, x(t)) + 2], \quad (3.8)$$

где $g_{t_i,\delta}(t)$ обозначает непрерывную, не превосходящую 1 функцию, равную 1 на $(t_i - \delta, t_i + \delta)$ и равную нулю вне $(t_i - 2\delta, t_i + 2\delta)$, A_i^ε — множество внутренних точек A_i, расстояние которых от границы A_i больше ε, а $\lambda(A, x(t)) = \inf_{y\in A} \rho(x(t), y)$. Функционал (3.8) непрерывен в каждой из топологий $\mathbf{J}_1$, $\mathbf{J}_2$, M_1, M_2, так как $\lambda(A, x(t))$ дает непрерывное в каждой топологии отображение пространства K_X в пространство K_{R_1} (R_1 — вещественная прямая). Поэтому существуют как угодно малые ε_1, для которых

$$\mathbf{P}\left\{f_\varepsilon^*[\xi_n(t)] < \frac{k}{2} + \varepsilon_1\right\} \to \mathbf{P}\left\{f_\varepsilon^*[\xi_0(t)] < \frac{k}{2} + \delta_1\right\}.$$

Так как $\sup_t g_{t_i}(t)\,(\lambda(A_i^\varepsilon, x(t)) + 1)/(\lambda(A_i^\varepsilon, x(t)) + 2) \leqslant 1/2$, то $f_\varepsilon^*[\xi_n(t)] < \frac{k}{2} + \varepsilon_1$ означает, что

$$g_{t_i,\delta}(t)\,(\lambda(A_i^\varepsilon, \xi_n(t)) + 1)/(\lambda(A_i^\varepsilon, \xi_n(t)) + 2) < \frac{1}{2} + \varepsilon_1$$

для всех i одновременно и, следовательно $\lambda(A_i^\varepsilon, \xi_n(t_i)) < \varepsilon_1$ для всех i одновременно. Поэтому при $\varepsilon_1 < \varepsilon$ получаем

$$\varliminf_{n\to\infty} \mathbf{P}\{\xi_n(t_i) \in A_i;\ i = 1, 2, \ldots, k\} \geqslant \mathbf{P}\left\{f_\varepsilon^*(\xi_0(t)) < \frac{k}{2} + \varepsilon_1\right\}.$$

С другой стороны, из того, что t_i являются точками стохастической непрерывности $\xi_0(t)$, следует, что событие $\left\{\lambda(A_i^\varepsilon, \xi_0(t_i)) < \frac{\varepsilon_1}{k};\ i = 1, 2 \ldots k\right\}$ влечет событие $\left\{f_\varepsilon^*[\xi_0(t)] < \frac{k}{2} + 2\varepsilon_1\right\}$, если пренебречь множеством, меру которого можно сделать как угодно малой выбором достаточно малого δ. А так как при достаточно малых ε и ε_1 $\mathbf{P}\{\lambda(A_i^\varepsilon, \xi_0(t_i)) < \varepsilon_1;\ i = 1, \ldots, k\}$ как угодно близка к $\mathbf{P}\{\xi_0(t_i) \in A_i;\ i = 1, \ldots, k\}$, то

$$\mathbf{P}\left\{f_\varepsilon^*(\xi_0(t)) < \frac{k}{2} + \varepsilon_1\right\} \geqslant \mathbf{P}\{\xi_0(t_i) \in A_i;\ i = 1, 2, \ldots k\} - \mu,$$

где μ как угодно малое число. Поэтому

$$\varliminf_{n\to\infty} \mathbf{P}\{\xi_n(t_i) \in A_i;\ i = 1, 2, \ldots, k\} \geqslant \mathbf{P}\{\xi_0(t_i) \in A_i;\ i = 1, 2, \ldots, k\}. \quad (3.9)$$

Так как $X = A_i \cup CA_i$ (CA_i — дополнение к A_i) и множества CA_i обладают теми же свойствами, что и A_i ($\overline{A_i} \cap \overline{X \setminus A_i} = \overline{CA_i} \cap \overline{X \setminus CA_i}$), то из (3.9) уже не трудно получить (3.7).

Продемонстрируем это для $k=2$; имеем неравенства

$$\begin{aligned}
&\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\mathbf{P}\{\xi_n(t_1)\in A_1,\ \xi_n(t_2)\in A_2\}\geqslant\mathbf{P}\{\xi_0(t_1)\in A_1,\ \xi_0(t_2)\in A_2\}\\
&\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\mathbf{P}\{\xi_n(t_1)\in A_1,\ \xi_n(t_2)\in CA_2\}\geqslant\mathbf{P}\{\xi_0(t_1)\in A_1,\ \xi_0(t_2)\in CA_2\}\\
&\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\mathbf{P}\{\xi_n(t_1)\in CA_1,\ \xi_n(t_2)\in A_2\}\geqslant\mathbf{P}\{\xi_0(t_1)\in CA_1,\ \xi_0(t_2)\in A_2\}\\
&\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\mathbf{P}\{\xi_n(t_1)\in CA_1,\ \xi_n(t_2)\in CA_2\}\geqslant\mathbf{P}\{\xi_0(t_1)\in CA_1,\ \xi_0(t_2)\in CA_2\}.
\end{aligned}\tag{3.10}$$

Если бы (3.7) не выполнялось, то нашлась бы подпоследовательность n_k такая, что

$$\lim_{n_k}\mathbf{P}\{\xi_{n_k}(t_1)\in A_1,\ \xi_{n_k}(t_2)\in A_2\}>\mathbf{P}\{\xi_0(t_1)\in A_1,\ \xi_0(t_2)\in A_2\}.$$

Прибавляя к этому неравенству три последних неравенства (3.10), мы получили бы $1>1$. Утверждение а) доказано.

Доказательства утверждения б) для различных топологий мало чем различаются. Проведем его для случая $S=\mathbf{J}_1$. Пусть

$$\Delta^{(m)}_{\mathbf{J}_1}(c,x(t))=\max_{t_1<t<t_2}(g_c(t_1,t,t_2))^m\{\min[\rho(x(t_1),x(t)),\rho(x(t),x(t_2))]\},$$

а $g_c(t_1,t,t_2)$ — такая непрерывная функция аргументов t_1, t, t_2, что

$$g_c(t_1,t,t_2)\begin{cases}=1 & t-c<t_1<t<t_2<t+c\\ <1 & \text{при остальных } t_1,t,t_2.\end{cases}$$

$\Delta^{(m)}_{\mathbf{J}_1}(c,x(t))$ при каждом m и c является $\mathbf{J}_1$-непрерывным функционалом, причем $\Delta^{(m)}_{\mathbf{J}_1}(c,x(t))>\Delta_{\mathbf{J}_1}(c,x(t))$. Поэтому

$$\overline{\lim_{n\to x}}\,\mathbf{P}\{\Delta_{\mathbf{J}_1}(c,\xi_n(t))>\varepsilon\}\leqslant\mathbf{P}\{\Delta^{(m)}_{\mathbf{J}_1}(c,\xi_0(t))>\varepsilon\}.$$

Так как $\lim\limits_{m\to\infty}\Delta^{(m)}_{\mathbf{J}_1}(c,x(t))=\Delta_{\mathbf{J}_1}(c,x(t))$,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\mathbf{P}\{\Delta_{\mathbf{J}_1}(c,\xi_n(t))>\varepsilon\}\leqslant\mathbf{P}\{\Delta_{\mathbf{J}_1}(c,\xi_0(t))>\varepsilon/2\}.$$

Остается показать, что

$$\lim_{c\to 0}\mathbf{P}\{\Delta_{\mathbf{J}_1}(c,\xi_0(t))>\varepsilon\}=0.$$

Но это следует из того, что для всякой $x(t)$ из K_X

$$\lim_{c\to 0}\Delta_{\mathbf{J}_1}(c,x(t))=0.$$

Теорема доказана.

Если мы проследим доказательство теоремы 3.2.1., то убедимся, что не обязательно требовать непрерывности $f[x(t)]$ — нас вполне бы устроили такие $f[x(t)]$, для которых из того, что $\xi_n(t)\xrightarrow{S}\xi_0(t)$ с вероятностью 1, следовало бы, что $f[\xi_n(t)]\to f[\xi_0(t)]$ с вероятностью 1. Пусть μ_{ξ_0} — мера на K_X, соответствующая процессу $\xi_0(t)$, тогда такими функциями $f[x(t)]$ будут функции непрерывные в топологии S, почти всюду по мере μ_{ξ_0}. Так мы приходим к

3.2.3. **Теорема.** *Если выполнены условия* а) *и* б) 3.2.1, *то для каждой функции* f, *определенной на* K_X *и принимающей значения из* F, *непрерывной в топологии* S *почти всюду по мере* μ_{ξ_0}, *распределение* $f[\xi_n(t)]$ *слабо сходится к распределению* $f[\xi_0(t)]$ *при* $n \to \infty$.

3.2.4. Следствие. *Пусть* K *такое множество из* K_X, *открытое в топологии* S, *что* $\mathbf{P}\{\xi_0(t) \in K'_S\} = 0$ (K'_S — *граница* K *в топологии* S). *Тогда, если выполнены условия* а) *и* б) 3.2.1,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\{\xi_n(t) \in K\} = \mathbf{P}\{\xi_0(t) \in K\}.$$

3.2.5. Замечание. Если пространство F содержит непрерывный прообраз отрезка, то тогда сходимость распределения $f[\xi_n(t)]$ к распределению $f[\xi_0(t)]$ для всех f из F_S влечет сходимость распределения $f[\xi_n(t)]$ к распределению $f[\xi_0(t)]$ для всех f, являющихся S-непрерывными почти всюду по мере μ_{ξ_0}.

3.2.6. Замечание. Распространение теоремы 3.2.1. на почти всюду непрерывные функционалы существенно расширяет область ее применимости. Так, из всех рассмотренных нами примеров 2.2.6—2.2.8 лишь $m_{[t_1, t_2]}[x(t)]$ и $M_{[t_1, t_2]}[x(t)]$ являются непрерывными в топологии U; но в то же время все эти функционалы почти всюду непрерывны в соответствующих топологиях (см. 2.2.9.—2.2.12), если только t_1 и t_2 являются точками стохастической непрерывности $\xi_0(t)$, а a и b таковы, что с вероятностью 1 в точке локального экстремума $\xi_0(t)$ отлична от a и b.

3.3. Прейдем теперь к условиям сходимости для функционалов, непрерывных в равномерной топологии. Обозначим через F_U совокупность функций, определенных на K_X принимающих значения из F — некоторого полного метрического сепарабельного пространства — и являющихся измеримыми относительно борелевского замыкания всех цилиндрических множеств (последнее требование отнюдь не является следствием непрерывности в топологии U, как это было бы в случае других топологий, рассматриваемых в этой статье).

3.3.1. *Если выполнены условия:*

а) *пусть* ε *таково, что с вероятностью* 1 $\xi_0(t)$ *не имеет скачков размера* $= \varepsilon$; *обозначим через* $\tau^{(\varepsilon)}_{n,1}, \tau^{(\varepsilon)}_{n,2}, \ldots, \tau^{(\varepsilon)}_{n,\nu^\varepsilon_n}$ *точки, где скачки* $\xi_n(t)$ *имеют размер больше* ε, *тогда*

$$\mathbf{P}\{\xi_n(t) \in A_1, \ldots, \xi_n(t_k) \in A_k;\ \tau^{(\varepsilon)}_{n,1} \in B_1, \ldots, \tau^{(\varepsilon)}_{n,m} \in B_m;\ \nu^\varepsilon_n = m\} \tag{3.11}$$

при $n \to \infty$ *стремится к*

$$\mathbf{P}\{\xi_0(t_1) \in A_1, \ldots, \xi_0(t_k) \in A_k;\ \tau^{(\varepsilon)}_{0,1} \in B_m, \ldots, \tau^{(\varepsilon)}_{0,m} \in B_m;\ \nu^\varepsilon_0 = m\} \tag{3.12}$$

для любых $t_1, \ldots, t_k \in [0, 1]$, *борелевских множеств* A_i *из* X *таких, что*

$$\mathbf{P}\{\xi_0(t_i) \in \overline{A}_i \cap x \setminus A_i\} = 0$$

и борелевских множеств $B_1, B_2, \ldots, B_m$ *на* $[0, 1]$, *причем разность между* (3.11) *и* (3.12) *по абсолютной величине не превосходит некоторой функции* $\lambda_n(t_1, \ldots, t_k, A_1, \ldots, A_k)$, *стремящейся к нулю при* $n \to \infty$ *и фиксированных* $t_1, \ldots, t_k, A_1, \ldots, A_k$;

б) $\lim\limits_{c\to 0} \lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{P}\{\Delta_{J_1}(c, \xi_n(t)) > h\} = 0$ *для всех* $h > 0$,

то для любой функции $f \in F_U$ *распределение* $f(\xi_n(t))$ *сходится к распределению* $f(\xi_0(t))$.

Доказательство. Предположим сначала, что функция f равномерно непрерывна в топологии U, т. е. для каждого ε можно указать такое δ, что

$$r_F(f(x(t)), f(y(t))) < \varepsilon,$$

если $\sup\limits_t \rho(x(t), y(t)) < \delta$.

Если утверждение теоремы неверно для f, то найдется $G \subset F$ такое, что

$$\mathbf{P}\{f(\xi_0(t)) \in \overline{G} \cap \overline{F \setminus G}\} = 0, \tag{3.13}$$

но $\mathbf{P}\{f(\xi_n(t)) \in G\}$ не стремится к $\mathbf{P}\{f(\xi_0(t)) \in G\}$. Поэтому найдутся такие $a > 0$ и подпоследовательность n_k, что

$$|\mathbf{P}\{f(\xi_{n_k}(t)) \in G\} - \mathbf{P}\{f(\xi_0(t)) \in G\}| > a.$$

Пусть, например,

$$\mathbf{P}\{f(\xi_{n_k}(t)) \in G\} > \mathbf{P}\{f(\xi_0(t)) \in G\} + a.$$

Определим случайные процессы $\xi_n^*(t)$ следующим образом: выберем точки $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = 1$ и положим $\xi_n^*(t_i) = \xi_n(t_i)$, если $t_i \leqslant t < t_{i+1}$ и между точками t_i и t_{i+1} или совсем нет точек $\tau_{n,k}^{(\varepsilon)}$ или есть не менее двух таких точек; если же в (t_i, t_{i+1}) лежит одна точка $\tau_{n,j}^{(\varepsilon)}$, то полагаем

$$\xi_n^*(t) = \begin{cases} \xi_n(t_i) & \text{для } t_i \leqslant t < \tau_{n,j}^{(\varepsilon)} \\ \xi_n(t_{i+1}) & \text{для } \tau_{n,j}^{(\varepsilon)} \leqslant t < t_{i+1} \end{cases}$$

Нетрудно убедиться, что

$$\mathbf{P}\{\sup_t \rho(\xi_n^*(t), \xi_n(t)) > 8\varepsilon\} \leqslant \mathbf{P}\{\Delta_{\mathbf{J}_1}(c, \xi_n(t)) > \varepsilon\}, \tag{3.14}$$

где $c = \max\limits_{i=1,\ldots,N-1}(t_{i+1} - t_i)$.

Поэтому, если $f(\xi_n(t)) \in G$, то $f(\xi_n^* \in G_\delta^+)$, где G_δ^+ обозначает множество всех точек, расстояние которых от G не превосходят δ, а δ таково, что

$$r_F(f(y(t)), f(x(t))) < \delta, \text{ при } \sup_t \rho(x(t), y(t)) < 8\varepsilon,$$

если $\Delta_{\mathbf{J}_1}(c, \xi_n(t)) \leqslant \varepsilon$.

С другой стороны, если $f(\xi_0^*(t)) \in G_\delta^-$, то $f(\xi_0(t) \in G$, где G_δ обозначает множество всех точек, расстояние которых от $F \setminus G$ не менее δ, если только $\Delta_{\mathbf{J}_1}(c, \xi_0(t)) \leqslant \varepsilon$.

Следовательно

$$\mathbf{P}\{f(\xi_{n_k}^*(t)) \in G_\delta^+\} > a + \mathbf{P}\{f(\xi_0^*(t)) \in G_\delta^-\} - \\ - \mathbf{P}\{\Delta_{\mathbf{J}_1}(c, \xi_{n_k}(t)) > \varepsilon\} - \mathbf{P}\{\Delta_{\mathbf{J}_1}(c, \xi_0(t)) > \varepsilon\}.$$

И далее

$$\mathbf{P}\{f(\xi_{n_k}^*(t)) \in G_\delta^+\} > a + \mathbf{P}\{f(\xi_0^*(t)) \in G_{2\delta}^+\} - \tag{3.15}$$
$$- \mathbf{P}\{f(\xi_0^*(t)) \in G_{2\delta}^+ \setminus G_\delta^-\} - \mathbf{P}\{\Delta_{\mathbf{J}_1}(c, \xi_0(t)) > \varepsilon\} - \mathbf{P}\{\Delta_{\mathbf{J}_1}(c, \xi_{n_k}(t)) > \varepsilon\}.$$

Так как $G_{2\delta}^+ \setminus G_\delta^-$ при $\delta \to 0$ образуют монотонно убывающую последовательность множеств, сходящуюся к $\overline{G} \cap \overline{F \setminus G}$, то ввиду (3.14)

$$\overline{\lim_{\delta \to 0}} \mathbf{P}\{f(\xi_0^*(t)) \in G_{2\delta}^+ \setminus G_\delta^-\} \leqslant \mathbf{P}\{\Delta_{\mathbf{J}_1}(c, \xi_n(t)) > \varepsilon\};$$

поэтому, выбирая достаточно малые ε, δ и c, все отрицательные члены в (3.15) можно сделать в сумме меньшими $a/2$. Тогда

$$\mathbf{P}\{f(\xi_{n_k}^*(t)) \in G_\delta^-\} > a/2 + \mathbf{P}\{f(\xi_0^*(t)) \in G_{2\delta}^+\}. \tag{3.16}$$

Очевидно, что распределение $\xi_n^*(t)$ полностью определяется вероятностями

$$\mathbf{P}\{\xi_n(t_i) \in A_i;\ i = 0, 1, \ldots, N;\ \tau_{n,j}^{(\varepsilon)} \in B_j;\ j = 1, 2, \ldots, m;\ \nu_n^\varepsilon = m\}.$$

Пусть множества A_i^r; $i = 0, 1, \ldots, N$; $r = 1, 2, \ldots, R$ таковы, что

$$\mathbf{P}\{\xi_0(t_i) \in \overline{A_i^r} \cap \overline{x \setminus A_i^r}\} = 0$$
$$\sum \mathbf{P}\{\xi_0(t_i) \in A_i^r;\ i = 1, \ldots, R\} > 1 - a/4, \tag{3.17}$$

где сумма берется по всевозможным различным наборам $r_1, r_2, \ldots, r_N$, если каждое из r_i независимо от других принимает одно из значений $1, \ldots, R$. Кроме того, предположим, что диаметр каждого из множеств A_i^r не превосходит μ, где μ такое, что

$$r_F(f(x(t)), f(y(t))) < \delta/4, \text{ если } \sup_t \rho(x(t), y(t)) < \mu.$$

Построим теперь новые процессы $\overline{\xi}_n^*(t)$ следующим образом: выберем в каждом множестве A_i^r по одной точке $x_i^{(r)}$, а y пусть будет произвольная точка, отличная от всех $x_i^{(r)}$; положим

$$\overline{\xi}_n^*(t_i) = \begin{cases} x_i^{(r)}, & \text{если } \xi_n^*(t_i) \in A_i^r, \\ y, & \text{если } \xi_n^*(t_i) \overline{\in} \bigcup\limits_r A_i^r; \end{cases}$$

и точки скачков $\overline{\xi}_n^*(t)$ совпадают с точками скачков $\xi_n^*(t)$, и $\overline{\xi}_n^*(t)$ постоянна там, где постоянна $\xi_n^*(t)$. Тогда из выбора μ (3.16) и (3.17) следует, что

$$\mathbf{P}\{f(\overline{\xi}_{n_k}(t)) \in G_{5\delta/4}^+\} > \frac{a}{4} + \mathbf{P}\{f(\overline{\xi}_0^*(t) \in G_{7\delta/4}^+\}. \tag{3.18}$$

Поэтому хотя бы при одном m и наборе точек $x_0^{(r_0)}, x_1^{(r_1)} \ldots, x_N^{(r_N)}$,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\ \mathbf{P}\{f(\overline{\xi}_n^*(t)) \in G_{5\delta/4}^+,\ \nu_n^\varepsilon = m,\ \overline{\xi}_n^*(t_i) = x_i^{(r_i)};\ i = 1, \ldots, N\} >$$
$$> \mathbf{P}\{f(\overline{\xi}_0^*(t)) \in G_{7\delta/4}^+,\ \nu_0^\varepsilon = m,\ \overline{\xi}_0^*(t_i) = x_i^{(r_i)};\ i = 1, \ldots, N\},$$

но это противоречит условию а), так как из него следует, что

$$\mathbf{P}\{\nu_n^\varepsilon = m,\ \tau_{n,1}^{(\varepsilon)} \in B_1, \ldots, \tau_{n,m}^{(\varepsilon)} \in B_m,\ \xi_n(t_0) \in A_0^{r_0}, \ldots, \xi_n(t_N) \in A_N^{r_N}\}$$

сходится по вариации при фиксированных m, $A_1^{r_1}, \ldots, A_N^{r_N}$ к

$$\mathbf{P}\{\nu_0^\varepsilon = m,\ \tau_{0,1}^{(\varepsilon)} \in B_1, \ldots, \tau_{0,m}^{(\varepsilon)} \in B_m,\ \xi_0(t_0) \in A_0^{r_0}, \ldots, \xi_0(t_N) \in A_N^{r_N}\}.$$

Этим завершается доказательство теоремы для равномерно непрерывных функций. Переход к произвольным непрерывным и даже почти всюду непрерывным относительно меры, порождаемой процессом $\xi_0(t)$, можно провести точно таким же образом как в [7], если заметить, что расстояние в равномерной метрике от измеримого множества будет измеримой равномерно непрерывной функцией.

3.2.2. Замечание. Условие а) можно заменить следующим условием а'): распределение величин $\tau_{n,1}^{(\varepsilon)}, \ldots, r_{n,m}^{(\varepsilon)}$ при условии, что $\nu_n^\varepsilon = m$, сходится по вариации к распределению величин $\tau_{0,1}^{(\varepsilon)}, \ldots, \tau_{0,m}^{(\varepsilon)}$ при условии, что $\nu_0^\varepsilon = m$; совместное распределение величин $\tau_{n_N}^{(\varepsilon)}$, $\nu_n^{(\varepsilon)}$, $\xi_n(t_1), \ldots, \xi_n(t_k)$ сходится к совместному распределению величин $\tau_{0,j}^{(\varepsilon)}$, ν_0^ε, $\xi_0(t_1), \ldots, \xi_0(t_k)$, если $t_1, \ldots, t_k$ принадлежат некоторому всюду плотному на $[0,1]$ множеству, включающему 0 и 1.

3.3.3. Замечание. Условие а') в 3.3.2. и условие б) в 3.3.1. будут необходимы и достаточны для выполнения теоремы 3.3.1., если F отрезок прямой. Необходимость б) следует из 3.2.2. Необходимость а') можно получить, если рассмотреть функционалы вида

$$f(\xi_n(t)) = g(\xi_n(t_1), \xi_n(t_2), \ldots, \xi_n(t_k); \tau_{n,1}^{(\varepsilon)}, \tau_{n,2}^{(\varepsilon)}, \ldots, \tau_{n,m}^{(\varepsilon)}),$$

где g непрерывна по первой совокупности переменных и измерима по Борелю для второй совокупности переменных.

Все полученные предельные теоремы могут применяться к различным конкретным случаям. Автор надеется в ближайшее время опубликовать приложения этих теорем к процессам с независимыми приращениями и к процессам Маркова.

Поступила в редакцию
10. 10. 56

ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Н. Колмогоров, Изв. АН СССР, отд. матем. и естеств. наук, 959 (1931).
[2] А. Н. Колмогоров, Изв. АН СССР, отд. матем. и естеств. наук, 363 (1933).
[3] М. Донскер, Mem. Am. Math. Soc., № 6 (1951).
[4] И. И. Гихман, Матем. збірник Київськ. держ. унів. 7, 75 (1953).
[5] Ю. В. Прохоров, Успехи матем. наук, 8, 165 (1953).
[6] Ю. В. Прохоров, Теория вероятностей и ее применения, 1, вып. 2 (1956).
[7] А. В. Скороход, ДАН СССР, 104, № 3 (1955).
[8] А. В. Скороход, ДАН СССР, 106, № 5 (1956).
[9] Н. Н. Ченцов, Теория вероятностей и ее применения, I, вып. 1 (1956).
[10] В. Феллер, Trans. Am. Math. Soc., 77, № 1, (1954).

LIMIT THEOREMS FOR STOCHASTIC PROCESSES

A. V. SKOROHOD *(MOSKOW)*

(Summary)

Let us consider a sequence of processes $\xi_n(t)$ wherein multivariate distibution $\xi_n(t_1), \xi_n(t_2), \ldots, \xi_n(t_k)$ tends to multivariate distribution $\xi_0(t_1), \xi_0(t_2), \ldots, \xi_0(t_k)$ for all k and $t_1, t_2, \ldots, t_k$.

Let f be the functional for which $f(\xi_n(t))$ are determined with a probability of 1. the latter being random variables (i. e. those that have probability distributions).

This paper contains several sufficient conditions, for which distributions $f(\xi_n(t))$ tend to distribution $f(\xi_0(t))$ as $n \to \infty$.

Let K be the space of all functions not having discontinuities higher than simple jumps, and let us assume that $\xi_n(t)$ with a probability of 1 is in K.

Several topologies in K are defined. The necessary and sufficient conditions are found for all functionals f that are continuous in these topologies whereby distribution $f(\xi_n(t))$ tends to distribution $f(\xi_0(t))$.

The results are demonstrated on the example of topology J_1 which is determined as follows:

sequence $x_n(t)$ tends to $x_0(t)$ in topology J_1 if there exists a sequence of monotonnic continuous functions $\lambda_n(t)$ for which

$$\lambda_n(0) = 0,\ \lambda_n(1) = 1,\ \lim_{n\to\infty} \sup_t |\lambda_n(t) - t| = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_t |x_n(\lambda_n(t)) - t| = 0.$$

Theorem: *Distribution $f(\xi_n(t))$ tends to distribution $f(\xi_0(t))$ for all f that are continuous in topology J_1, if and only if*

a) *multivariate distribution $\xi_n(t_1), \ldots, \xi_n(t_k)$ tends to multivariate distribution $\xi_0(t_1), \ldots, \xi_0(t_k)$, for all k, and $t_1, t_2, \ldots, t_k$ from some set N that is dense on* [0,1].

b) *for all $\varepsilon > 0$*

$$\lim_{c\to 0} \overline{\lim_{n\to\infty}} P\{\sup_{t-c<t_1<t<t_2<t+c} \min[|\xi_n(t_1) - \xi_n(t)|;\ |\xi_n(t) - \xi_n(t_2)|] > \varepsilon\} = 0.$$

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
Том I И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ *Выпуск 3*

1956

О ПУАССОНОВСКИХ ПОТОКАХ СЛУЧАЙНЫХ СОБЫТИЙ

А. Я. ХИНЧИН

§ 1. Постановка задачи

В классических приложениях теории потоков случайных событий (например, в теории распада атомов и теории массового обслуживания) рассматривается, как известно, в большинстве случаев лишь простейший вид таких потоков, когда вероятность наступления k событий в произвольно взятом промежутке времени длины t дается формулой

$$v_k(t) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}, \tag{1}$$

где $\lambda > 0$— постоянная; такой поток предполагается обычно потоком *без последействия*; это означает, что для любой конечной подгруппы попарно не пересекающихся промежутков времени числа наступающих в этих промежутках событий представляют собой взаимно независимые случайные величины.

Причиной столь широкой распространенности потоков специальной формы (1) служит, как известно, то, что эта форма для некоторого весьма обширного класса потоков фактически является единственно возможной. Именно, если к требованиям стационарности и отсутствия последействия добавить еще условие

$$\psi_2(t) = o(t) \quad (t \to 0), \tag{2}$$

где $\psi_2(t)$ означает вероятность наступления по меньшей мере двух событий в промежутке времени длины t, то рассматриваемый поток обязательно будет иметь форму (1) (см., например, [1], гл. 1). Обратно, всякий поток без последействия, имеющий форму (1), очевидно стационарен и, как легко убедиться, удовлетворяет условию (2). Таким образом, три перечисленных свойства — отсутствие последействия, стационарность и условие (2) — полностью характеризуют собою класс «пуассоновских» потоков (1).

Однако в приложениях все чаще появляются задачи, требующие исследования *нестационарных* потоков событий без последействия. За исходный пункт такого исследования обычно бывает целесообразно принять «ведущую функцию» $\Lambda(t)$ данного потока — математическое ожидание числа событий, наступающих в полуоткрытом промежутке $[0, t)$. В стационарном случае $\Lambda(t) = \lambda t$, где $\lambda > 0$— постоянная; в общем случае $\Lambda(t)$—любая неубывающая функция от t [$\Lambda(t) = 0$ при $t \leqslant 0$]. Обычно при этом предполагают, что поток имеет «пуассоновскую» форму

$$v_k(\alpha, \beta) = e^{-[\Lambda(\beta)-\Lambda(\alpha)]}\frac{[\Lambda(\beta)-\Lambda(\alpha)]^k}{k!} \tag{3}$$

[$v_k(\alpha, \beta)$ означает вероятность того, что в промежутке (α, β) наступит k событий данного потока; задание всех функций $v_k(\alpha, \beta)$ $(k \geqslant 0, 0 \leqslant \alpha < \beta)$, очевидно, дает полное описание данного потока без последействия]. Однако форма (3) при заданной ведущей функции $\Lambda(t)$ отнюдь не является единственно возможной: ведь даже в стационарном случае, как было упомянуто выше, форма (3) [в этом случае совпадающая с (1)] имеет место лишь при выполнении дополнительного требования (2). С другой стороны, в моей недавней работе [2] непосредственно показано, что общая форма потоков без последействия с данной ведущей функцией $\Lambda(t)$, даже в случае непрерывной $\Lambda(t)$ выходит далеко за пределы формулы (3).

Таким образом, естественно возникает вопрос о том, какими свойствами должен обладать поток без последействия для того, чтобы иметь простейшую (почти всегда принимаемую в приложениях) «пуассоновскую» форму (3); дело идет при этом об отыскании возможно простого (необходимого и достаточного) дополнительного требования, подобно условию (2) в стационарном случае. Решение этой задачи означало бы распространение на нестационарный случай той фундаментальной теоремы, которую мы приводили в самом начале для случая стационарного. От данного потока при этом, кроме отсутствия последействия, мы будем требовать только существование ведущей функции $\Lambda(t)$ [т. е. $\Lambda(t) < +\infty$ при $t < +\infty$].

Как покажет исследование, наиболее интересным при этом будет случай, когда функция $\Lambda(t)$ непрерывна; точки же разрыва этой функции, если они имеются, осложняют решение задачи лишь в весьма незначительной степени.

§ 2. Регулярный случай

Условимся ради краткости называть поток без последействия регулярным, если его ведущая функция $\Lambda(t)$ всюду непрерывна. В этом параграфе мы будем рассматривать только регулярные потоки. В частности, регулярным будет любой стационарный поток без последействия [так как для такого потока $\Lambda(t) = \lambda t$, $0 < \lambda < +\infty$].

Пусть для любого стационарного потока и любого $k \geqslant 0$, $\psi_k(t)$ означает вероятность того, что в промежутке длины t наступит по меньшей мере k событий данного потока. Очевидно, мы всегда имеем

$$\psi_k(t) = \sum_{l=k}^{\infty} v_l(t) \quad (k \geqslant 0).$$

Убедимся прежде всего, что для стационарного потока условие (2) равносильно соотношению

$$\frac{\psi_2(t)}{\psi_1(t)} \to 0 \quad (t \to 0). \tag{4}$$

С этой целью заметим, что, как известно ([1], стр. 24), для любого стационарного потока при $t \to +0$

$$\frac{\psi_1(t)}{t} \to \alpha \quad (0 < \alpha \leqslant +\infty);$$

но в нашем случае

$$\psi_1(t) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k(t) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} k v_k(t) = \Lambda(t) = \lambda t$$

и, следовательно, $\alpha \leqslant \lambda < +\infty$; таким образом, при $t \to +0$ отношение $\psi_1(t)/t$ в нашем случае стремится к некоторому конечному положительному пределу, и соотношение

$$\frac{\psi_2(t)}{t} = \frac{\psi_2(t)}{\psi_1(t)} \frac{\psi_1(t)}{t}$$

показывает, что требования (2) и (4) действительно равносильны.

Условимся теперь называть любой (вообще говоря, нестационарный) поток ординарным, если при любых $t > 0$ и $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для $0 \leqslant \alpha < \beta < \alpha + \delta < t$ имеет место неравенство

$$\psi_2(\alpha, \beta) \leqslant \varepsilon \psi_1(\alpha, \beta). \tag{5}$$

При этом $\psi_k(\alpha, \beta)$ означает вероятность того, что в промежутке (α, β) наступит по меньшей мере k событий данного потока. Вместо этого несколько сложного определения ординарности мы могли бы и просто сказать, что

$$\frac{\psi_2(\alpha, \beta)}{\psi_1(\alpha, \beta)} \to 0 \quad (\beta - \alpha \to 0)$$

равномерно в области $0 \leqslant \alpha < \beta \leqslant t$, если бы мы не были вынуждены учитывать возможность равенства $\psi_1(\alpha, \beta) = 0$.

Для стационарного потока ординарность, очевидно, равносильна требованию (4) (а значит, как мы видели, и требованию (2)). Приведенная нами в § 1 хорошо известная теорема может поэтому быть формулирована так, что для стационарного потока без последействия ординарность служит необходимой и достаточной предпосылкой формы (1). Теперь мы покажем, что эта теорема распространяется на все регулярные потоки: *необходимой и достаточной предпосылкой пуассоновской формы* (3) *регулярного потока является его* [понимаемая в смысле условия (5)] *ординарность*.

Доказательство. Пусть данный поток — регулярный и ординарный. Его производящая функция

$$\Phi(x, \alpha, \beta) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(\alpha, \beta) x^k,$$

как я показал в моей работе [2], может быть представлена в виде

$$\Phi(x, \alpha, \beta) = \exp\left\{\sum_{k=0}^{\infty} [\chi_k(\beta) - \chi_k(\alpha)] x^k\right\},$$

где функции $\chi_k(t)$ $(k = 0, 1, \ldots)$ всюду непрерывны и при $k > 0$ — не убывающие; при этом

$$\chi_k(0) = 0 \ (k \geqslant 0), \ \sum_{k=0}^{\infty} \chi_k(t) = 0, \ \sum_{k=1}^{\infty} k\chi_k(t) < +\infty \ (t \geqslant 0).$$

Там же мною показано, что при $k > 0$

$$\chi_k(\beta) - \chi_k(\alpha) = \lim_{d \to 0} \sum_{r=1}^{s} \frac{v_k(\alpha_{r-1}, \alpha_r)}{v_0(\alpha_{r-1}, \alpha_r)}, \qquad (6)$$

где $\alpha = \alpha_0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_s = \beta$ — любое разбиение промежутка (α, β), и $d = \max\limits_{1 \leqslant r \leqslant s} (\alpha_r - \alpha_{r-1})$.

В нашем случае, в силу предположенной ординарности данного потока, для любых $t > 0$ и $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\delta > 0$, что при $0 \leqslant t_1 < t_2 < t_1 + \delta < t$ всегда

$$\psi_2(t_1, t_2) \leqslant \varepsilon \psi_1(t_1, t_2).$$

Отсюда

$$(1 - \varepsilon)\psi_2(t_1, t_2) \leqslant \varepsilon [\psi_1(t_1, t_2) - \psi_2(t_1, t_2)] = \varepsilon v_1(t_1, t_2)$$

и, следовательно, при $\varepsilon < 1/2$

$$\psi_2(t_1, t_2) \leqslant 2\varepsilon v_1(t_1, t_2).$$

Поэтому, если δ достаточно мало, мы имеем при $d < \delta$

$$\psi_2(\alpha_{r-1}, \alpha_r) \leqslant 2\varepsilon v_1(\alpha_{r-1}, \alpha_r) \quad (1 \leqslant r \leqslant s),$$

и при $k > 1$ из (6) следует

$$\chi_k(\beta) - \chi_k(\alpha) \leqslant \limsup_{d \to 0} \sum_{r=1}^{s} \frac{\psi_k(\alpha_{r-1}, \alpha_r)}{v_0(\alpha_{r-1}, \alpha_r)} \leqslant 1 \limsup_{d \to 0} \sum_{r=1}^{s} \frac{\psi_2(\alpha_{r-1}, \alpha_r)}{v_0(\alpha_{r-1}, \alpha_r)} \leqslant$$

$$\leqslant 2\varepsilon \limsup_{d \to 0} \sum_{r=1}^{s} \frac{v_1(\alpha_{r-1}, \alpha_r)}{v_0(\alpha_{r-1}, \alpha_r)} = 2\varepsilon [\chi_1(\beta) - \chi_1(\alpha)].$$

А так как ε может быть выбрано сколь угодно малым, то $\chi_k(\beta) - \chi_k(\alpha) = 0$ $(k > 1)$, и мы находим

$$\Phi(x, \alpha, \beta) = \exp\{[\chi_0(\beta) - \chi_0(\alpha)] + x[\chi_1(\beta) - \chi_1(\alpha)]\},$$

или, полагая $\chi_1(t) = -\chi_0(t) = \Lambda(t)$,

$$\Phi(x, \alpha, \beta) = \exp\{[\Lambda(\beta) - \Lambda(\alpha)](x - 1)\},$$

что равносильно (3).

Пусть мы теперь, обратно, имеем любой регулярный поток вида (3). Полагая $\Lambda(\beta) - \Lambda(\alpha) = h$, мы находим

$$\psi_1(\alpha, \beta) = 1 - e^{-h}, \quad \psi_2(\alpha, \beta) = 1 - e^{-h} - he^{-h}; \qquad (7)$$

так как функция $\Lambda(t)$ равномерно непрерывна в любом конечном интервале, то величина h при $\beta - \alpha \to 0$ бесконечно мала равномерно относительно α и β. Неравенство (5) тривиально при $h = 0$; если же $h > 0$, то, в силу (7), $\psi_1(\alpha, \beta) = h + o(h)$, $\psi_2(\alpha, \beta) = o(h)$, откуда снова вытекает (5), если $\beta - \alpha$ (а следовательно, и h) достаточно мало. Таким образом, данный поток — ординарный, и наше утверждение доказано полностью.

§ 3. Общий случай

Переходим теперь к случаю, когда $\Lambda(t)$—любая неубывающая функция [$\Lambda(t) = 0$ при $t < 0$]. В моей уже цитированной работе [2] я называл данный поток сингулярным, если образующие его события могут

наступать лишь в заранее определенные моменты времени t_i $(i = 1, 2, \ldots)$ (в конечном или счетном числе), а числа событий, наступающих в различные моменты t_i, представляют собою взаимно независимые случайные величины. В частности, если вероятность наступления k событий в момент t_i имеет вид

$$e^{-\alpha_i}\frac{\alpha_i^k}{k!} \quad (\alpha_i > 0,\ i = 1, 2, \ldots), \tag{8}$$

т. е. если каждая из только что упомянутых случайных величин распределена по некоторому закону Пуассона, то мы будем называть данный сингулярный поток пуассоновским. Для полного описания такого потока достаточно, таким образом, задать все его «ступени» t_i и соответствующие им значения α_i пуассоновского параметра.

Если имеется только одна ступень t_i и число наступающих в момент t_i событий подчиняется пуассоновскому закону (8), то производящая функция числа событий, наступающих в промежутке (α, β) равна

$$\Gamma_i(x,\ \alpha,\ \beta) = \begin{cases} \exp\{\alpha_i(x-1)\} & (\alpha \leqslant t_i < \beta), \\ 1 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Но в общем случае пуассоновский сингулярный поток представляет собою, очевидно, суперпозицию конечного или счетного числа элементарных потоков только что описанного типа, независимых между собою. Таким образом, для производящей функции общего пуассоновского сингулярного потока мы находим выражение

$$\Gamma(x,\ \alpha,\ \beta) = \exp\Big\{(x-1)\sum_{\alpha \leqslant t_i < \beta}\alpha_i\Big\}.$$

При этом необходимо допустить, что ряд

$$\sum_{0 \leqslant t_i < t}\alpha_i = C(t)$$

сходится при любом $t \geqslant 0$; мы имеем

$$\Gamma(x,\ \alpha,\ \beta) = \exp\{[C(\beta) - C(\alpha)](x-1)\}.$$

Составим теперь суперпозицию данного пуассоновского сингулярного потока с регулярным ординарным потоком (имеющим, согласно § 2, форму (3)), ведущую функцию которого мы обозначим через $\Lambda(t)$, а производящую функцию через

$$\Phi(x,\ \alpha,\ \beta) = \exp\{[\Lambda(\beta) - \Lambda(\alpha)](x-1)\}.$$

Эта суперпозиция будет, очевидно, иметь тот же тип производящей функции, что и ее компоненты, с $C(t) + \Lambda(t)$ в качестве ведущей функции; образуемый ею поток имеет, следовательно, форму (3). Мы видим, таким образом, что *суперпозиция двух взаимно независимых потоков, один из которых — регулярный ординарный, а другой — пуассоновский сингулярный с рядом значений параметра, сходящимся в любом конечном интервале, всегда является потоком вида* (3).

Рассмотрим теперь, обратно, произвольный поток без последействия вида (3), где $\Lambda(t)$ означает некоторую неубывающую функцию [$\Lambda(t) = 0$ при $t < 0$]. Пусть $t_1, t_2, \ldots$ занумерованные в любом порядке точки разрыва функции $\Lambda(t)$.
Положим

$$\Lambda(t_i + 0) - \Lambda(t_i - 0) = \alpha_i \ (i = 1, 2, \ldots), \ \sum_{0 \leqslant t_i < t} \alpha_i = C(t),$$

так что $\Lambda(t) - C(t) = \Lambda^*(t)$ непрерывная неубывающая функция. Положим далее

$$\exp\{[C(\beta) - C(\alpha)](x-1)\} = \Gamma(x, \alpha, \beta),$$
$$\exp\{[\Lambda^*(\beta) - \Lambda^*(\alpha)](x-1)\} = \Phi^*(x, \alpha, \beta),$$
$$\exp\{[\Lambda(\beta) - \Lambda(\alpha)](x-1)\} = \Phi(x, \alpha, \beta),$$

откуда

$$\Phi(x, \alpha, \beta) = \Gamma(x, \alpha, \beta)\,\Phi^*(x, \alpha, \beta).$$

Оба множителя правой части этого равенства представляют собою производящие функции потоков типа (3), ведущие функции которых соответственно равны $C(t)$ и $\Lambda^*(t)$. Так как функция $\Lambda^*(t)$ непрерывна, то второй из этих потоков —регулярный; а так как это поток типа (3), то в силу результатов § 2 он должен быть ординарным.

Рассмотрим теперь первый поток с производящей функцией $\Gamma(x, \alpha, \beta)$. Так как

$$C(\beta) - C(\alpha) = \sum_{\alpha \leqslant t_i < \beta} \alpha_i,$$

то

$$\Gamma(x, \alpha, \beta) = \prod_{\alpha \leqslant t_i < \beta} \exp\{\alpha_i (x-1)\},$$

отдельный множитель произведения, стоящего в правой части этого равенства, имеет вид

$$\exp\{\alpha_i (x-1)\} = e^{-\alpha_i} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_i^k}{k!} x^k,$$

и, следовательно, представляет собою производящую функцию распределения Пуассона с параметром α_i; следовательно, $\Gamma(x, \alpha, \beta)$ есть производящая функция пуассоновского сингулярного потока со ступенями t_i и параметрами $\alpha_i = \Lambda(t_i + 0) - \Lambda(t_i - 0)$, так что ряд

$$\sum_{0 \leqslant t_i < t} \alpha_i \leqslant \Lambda(t)$$

сходится при любом $t \geqslant 0$.

Мы приходим, таким образом, к заключению, что *любой поток типа* (3) *может быть представлен в виде суперпозиции двух взаимно независимых потоков, из которых один регулярный и ординарный, а другой — пуассоновский сингулярный со сходящимся в любом конечном интервале рядом параметров.*

Сопоставляя это с результатом, полученным выше, мы приходим к следующему предложению, которое и решает собою поставленную в настоящей статье задачу.

Теорема. *Для того, чтобы поток без последействия имел форму* (3), *необходимо и достаточно, чтобы он представлял собою суперпозицию двух взаимно независимых потоков, из которых один регулярный и ординарный, а другой—пуассоновский сингулярный, с рядом параметров, сходящимся в каждом конечном интервале.*

Разложение, о котором здесь идет речь, непосредственно определяется ведущей функцией $\Lambda(t)$ данного потока: ступенями сингулярной компоненты служат точки разрыва функции $\Lambda(t)$, в качестве параметра α_i для ступени t_i фигурирует величина $\Lambda(t_i+0)-\Lambda(t_i-0)$; наконец, ведущими функциями компонент служат $C(t)=\sum_{t_i<t}\alpha_i$ (для сингулярной компоненты) и $\Lambda^*(t)=\Lambda(t)-C(t)$ (для регулярной компоненты).

Поступила в редакцию
15.07.56

ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Я. Хинчин, Математические методы теории массового обслуживания. Труды Мат. инст. им. Стеклова, 49, (1955), 1—122.
[2] А. Я. Хинчин, Теория вероятностей и ее применения, 1, вып. 1 (1956), 3—17.

ÜBER POISSONSCHE FOLGEN ZUFÄLLIGER EREIGNISSE

A. KHINTCHINE (MOSKAU)

(*Susammenfassung*)

In den klassischen Anwendungen der Theorie der zufälligen Ereignisse setzt man gewöhnlich voraus, dass die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten von k Ereignissen der gegebenen Art in einer Zeitstrecke der Länge t durch die poissonsche Formel

$$v_k(t)=e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}\quad(\lambda>0 \text{ konst})$$

gegeben wird. Bekanntlich lässt sich in der Tat leicht zeigen, dass dies immer der Fall ist, wenn die gegebene Folge von Ereignissen nachwirkungsfrei und stazionär ist und der Bedingung

$$\psi_2(t)=o(t)\quad(t\to 0) \tag{1}$$

genügt, wo $\psi_k(t)=\sum_{r=k}^{\infty}v_r(t)$ ist.

Im Fall einer nichtstazionärer Folge bedeutet allgemein $\Lambda(t)$ die mittlere Anzahl der in der Strecke $(0, t)$ eintretenden Ereignisse (so dass im stationären Fall $\Lambda(t)=\lambda t$ ist). Man pflegt dann für die Wahrscheinlichkeit $v_k(\alpha, \beta)$ des Eintretens von k Ereignissen in der Zeitstrecke (α, β)

$$v_k(\alpha,\beta)=e^{-[\Lambda(\beta)-\Lambda(\alpha)]}\frac{[\Lambda(\beta)-\Lambda(\alpha)]^k}{k!} \tag{2}$$

zu setzen, also wieder eine poissonsche Verteilung zu postulieren. Die Voraussetzung der Nachwirkungsfreiheit wird selbstverständlich erhalten, und es entsteht sachgemäss die Frage, welche Forderung an Stelle von (1) treten muss, damit in diesem allgemeineren

Fall die poissonsche Form (2) für die gegebene Folge erhalten bleibt? Vorliegende Abhandlung stellt sich das Ziel, diese Frage zu beantworten.

Wir setzen allgemein

$$\sum_{r=k}^{\infty} v_r(\alpha, \beta) = \psi_k(\alpha, \beta)$$

und nennen die gegebene Folge ordinär, wenn für beliebige $t > 0$ und $\varepsilon > 0$ sich stets ein $\delta > 0$ vorgeben lässt, so dass bei $0 \leqq \alpha < \beta < \alpha + \delta < t$

$$\psi_2(\alpha, \beta) \leqq \varepsilon \psi_1(\alpha, \beta)$$

ist. Für eine stazionäre Folge fällt die Ordinarität, wie man leicht einsieht, mit der Forderung (1) zusammen.

Es wird bewiesen, dass *für jede nachwirkungsfreie Folge mit stetigem* $\Lambda(t)$ *ihre Ordinarität für den poissonschen Charakter* (2) *notwendig und hinreichend ist.* Ist $\Lambda(t)$ unstetig, so gestaltet sich dass allgemeine Bild etwas komplizierter. Die gegebene Folge muss dann eine Überlagerung von zwei gegenseitig unabhängigen Folgen bilden, deren eine die soeben geschilderte Art hat (also insbesondere ordinär ist); die andere ist eine «singuläre poissonsche» Folge. Mit diesem Namen wird eine Folge bezeichnet, deren Ereignisse nur in höchstens abzählbar vielen Zeitpunkten $t_1, t_2, \ldots$ eintreten können, die im vorausgegeben sind (das sind die Unstetigkeitspunkte von $\Lambda(t)$).

Dabei muss die Anzahl der im Punkte t_i eintretenden Ereignisse einem poissonschen Verteilungsgesetz unterliegen, dessen Parameter α_i für verschiedene i verschieden ausfällt, und die Reihe $\Sigma\alpha_i$ über alle $t_i \leqq t$ erstreckt, muss für jedes $t > 0$ konvergieren.

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
Том I И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ *Выпуск 3*
1956

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ РАССЕЯНИЯ МИКРОЧАСТИЦ

А. С. МОНИН

При статистическом изучении ансамбля микрочастиц в ряде проблем допустимо пользоваться упрощенными представлениями о свойствах индивидуальных частиц. Так, в кинетической теории газов для молекул используется модель упругих шариков. В настоящей работе при статистической интерпретации рассеяния микрочастиц мы будем упрощенно трактовать их индивидуальные свойства, допуская, что для них имеет смысл понятие траектории движения; более полное описание поведения микрочастиц (с учетом их квантовых свойств) для наших целей не является необходимым.

Мы будем считать, что частицы могут двигаться лишь с ограниченной скоростью, и что средняя длина свободного пробега частиц в среде конечна (не является бесконечно малой). Следовательно, траекторию движения каждой индивидуальной частицы можно считать почти всюду дифференцируемой, так что, в отличие от безинерционного броуновского движения, имеет смысл говорить о мгновенной скорости движения. Пусть $\vec{\rho}(t)$, $\vec{\sigma}(t)$ и $\lambda(t)$ — радиус-вектор, единичный вектор скорости движения и энергия частицы в момент времени t. Подобно тому, как теория безинерционного броуновского движения основана на предположении, что $\vec{\rho}(t)$ есть марковский случайный процесс, мы примем за основу теории рассеяния микрочастиц предположение, что $\{\vec{\rho}(t), \vec{\sigma}(t), \lambda(t)\}$ есть многомерный марковский случайный процесс.

Движение микрочастиц в рассеивающей среде мы схематизируем следующим образом: частица движется прямолинейно со скоростью, определяемой ее энергией, и в случайные моменты времени претерпевает «рассеяния», при которых изменяется ее направление движения и энергия. Поглощение можно при этом трактовать как «рассеяние», приводящее к переходу энергии на наинизший возможный уровень λ_0 («энергия покоя»), при котором скорость движения равна нулю, и дальнейшие изменения состояния частицы являются запрещенными.

Таким образом, случайные функции $\vec{\sigma}(t)$ и $\lambda(t)$ будут предполагаться имеющими точки разрыва первого рода в дискретном множестве точек оси t и постоянными в промежутках между этими точками разрыва. В соответствии с этим случайная функция $\vec{\rho}(t)$ будет иметь всюду кроме дискретного множества точек разрыва функции $\vec{\sigma}(t)$ определенную производную.

§ 1. Вывод кинетического уравнения

Для любых борелевских множеств V из пространства R, S из единичной сферы Ω и L из положительной полупрямой Λ при $t > \tau$ определим вероятность перехода

$$P(V, S, L, t \mid \vec{r}, \vec{s}, l, \tau) = \mathbf{P}\{\vec{\rho}(t) \in V, \vec{\sigma}(t) \in S, \lambda(t) \in L \mid \vec{\rho}(\tau) = \vec{r}, \vec{\sigma}(\tau) = \vec{s}, \lambda(\tau) = l\} = \int_V f(\vec{\rho}, S, L, t \mid \vec{r}, \vec{s}, l, \tau)\, dV_{\vec{\rho}} \quad (1)$$

и безусловное распределение вероятностей для $\vec{\rho}(t)$, $\vec{\sigma}(t)$, $\lambda(t)$

$$\mathbf{P}\{\vec{\rho}(t) \in V, \vec{\sigma}(t) \in S, \lambda(t) \in L\} = \int_V Q(\vec{\rho}, S, L, t)\, dV_{\vec{\rho}}. \quad (2)$$

Здесь и далее символ $\mathbf{P}\{A\}$ означает вероятность события A. Принятое здесь допущение о существовании плотностей вероятностей в R является одним из ограничений, налагаемых нами на рассматриваемый марковский процесс, и оправдывается физическими соображениями. Ниже при выводе кинетического уравнения мы примем ряд дальнейших допущений, также оправдываемых физическими соображениями, не анализируя в общем виде тонких вопросов о классе марковских процессов, для которых справедливо окончательное уравнение.

Нашей задачей будет вывод уравнения, которому удовлетворяет функция $Q(\vec{\rho}, S, L, t)$. Для этого мы сначала найдем уравнение, которому удовлетворяет функция $f(\vec{\rho}, S, L, t \mid \vec{r}, \vec{s}, l, \tau)$, т. е. определим вид бесконечно-малого оператора, соответствующего уравнению Смолуховского для рассматриваемого марковского процесса

$$f(\vec{\rho}, S, L, t + \Delta \mid \vec{r}, \vec{s}, l, \tau) = \int_R \int_\Omega \int_\Lambda f(\vec{p}, d\Omega_{\vec{\sigma}}, d\lambda, t \mid \vec{r}, \vec{s}, l, \tau) f(\vec{\rho}, S, L, t + \Delta \mid \vec{p}, \vec{\sigma}, \lambda, t)\, dV_{\vec{p}}. \quad (3)$$

Уравнение для Q сможет быть получено из уравнения для f с помощью соотношения

$$Q(\vec{\rho}, S, L, t) = \int_R \int_\Omega \int_\Lambda Q(\vec{r}, d\Omega_{\vec{s}}, dl, \tau) f(\vec{\rho}, S, L, t \mid \vec{r}, \vec{s}, l, \tau)\, dV_{\vec{r}}. \quad (4)$$

Прежде чем выводить уравнение для f, определим две важные характеристики нашего марковского процесса. Рассмотрим при $l \neq \lambda_0$ условную вероятность $P(R, S, L, t \mid \vec{r}, \vec{s}, l, \tau)$ для замкнутых множеств S и L. Допустив ее непрерывность по t в точке $t = \tau$, убеждаемся, что при $t \to \tau$ эта вероятность стремится к пределу $F(l, L) F(\vec{s}, S)$, где $F(l, L)$ есть характеристическая функция множества L (равная единице при $l \in L$ и нулю в противоположном случае), и аналогичный смысл имеет $F(\vec{s}, S)$. Допустим, что существует предел

$$a(S, L \mid \vec{r}, \vec{s}, l, \tau) = \lim_{\Delta \to 0} \frac{1}{\Delta} [P(R, S, L, \tau + \Delta \mid \vec{r}, \vec{s}, l, \tau) - F(l, L) F(\vec{s}, S)] = \left[\frac{\partial P(R, S, L, t \mid \vec{r}, \vec{s}, l, \tau)}{\partial t}\right]_{t=\tau}. \quad (5)$$

Эта величина является первой из интересующих нас характеристик. Поскольку $P(R, \Omega, \Lambda, t \mid \vec{r}, \vec{s}, l, \tau) = 1$, убеждаемся, что $a(\Omega, \Lambda \mid \vec{r}, \vec{s}, l, \tau) = 0$.

Далее воспользуемся условием ограниченности скорости движения частиц, согласно которому существует такая ограниченная функция $C_l(\vec{r}, \vec{s}, \tau)$, что при любом сколь угодно малом $\Delta > 0$ условная вероятность соотношения $|\vec{\rho}(\tau + \Delta) - \vec{\rho}(\tau)| \leqslant C_l(\vec{r}, \vec{s}, \tau)\Delta$ при условиях $\vec{\rho}(\tau) = \vec{r}$, $\vec{\sigma}(\tau) = \vec{s}$, $\lambda(\tau) = l$ равна единице. При этом условии существует предел

$$\vec{s}u_l(\vec{r}, \vec{s}, \tau) = \lim_{\Delta \to 0} \mathbf{M}\left\{\frac{\vec{\rho}(\tau + \Delta) - \vec{\rho}(\tau)}{\Delta} \,\middle|\, \vec{\rho}(\tau) = \vec{r}, \vec{\sigma}(\tau + \Delta) = \vec{\sigma}(\tau) = \vec{s}, \lambda(\tau + \Delta) = \lambda(\tau) = l\right\},$$

где $\mathbf{M}$ — символ математического ожидания. Величина $u_l(\vec{r}, \vec{s}, \tau)$ является второй из интересующих нас характеристик. Она имеет смысл величины средней скорости движения частицы в момент τ в точке $\vec{r}$ по направлению $\vec{s}$ с энергией l. Можно убедиться, что при указанном условии имеет место соотношение

$$\lim_{\Delta \to 0} \frac{1}{\Delta} \int_R (\vec{\rho} - \vec{r}) f(\vec{\rho}, S, L, \tau + \Delta \mid \vec{r}, \vec{s}, l, \tau)\, dV_{\vec{\rho}} = \vec{s}u_l(\vec{r}, \vec{s}, \tau) F(l, L) F(\vec{s}, S); \tag{6}$$

кроме того, вторые моменты случайной величины $\vec{\rho}(r + \Delta) - \vec{\rho}(\tau)$ являются бесконечно-малыми относительно Δ.

При сформулированных условиях и при наличии у функций f и u свойств гладкости, обеспечивающих законность последующих операций, для f можно вывести уравнение первого порядка по t аналогично тому, как это делается в фундаментальной работе А. Н. Колмогорова [1]. Мы лишь напомним вкратце идею такого вывода. Рассмотрим при $l \neq \lambda_0$ интеграл

$$I = \int_R B(\vec{\rho}) \frac{\partial f(\vec{\rho}, S, L, t \mid \vec{r}, \vec{s}, l, \tau)}{\partial t} dV_{\vec{\rho}} =$$

$$= \lim_{\Delta \to 0} \frac{1}{\Delta} \int_R B(\vec{\rho}) [f(\vec{\rho}, S, L, t + \Delta \mid \vec{r}, \vec{s}, l, \tau) - f(\vec{\rho}, S, L, t \mid \vec{r}, \vec{s}, l, \tau)\, dV_{\vec{\rho}},$$

где $B(\vec{\rho})$ — произвольная дважды непрерывно дифференцируемая функция, отличная от нуля лишь при $|\vec{\rho}| \leqslant A < \infty$. Заменив уменьшаемое в квадратных скобках правой частью уравнения (3), произведя интегрирование по $\vec{\rho}$ под знаками интегралов по $\vec{p}$, $\vec{\sigma}$ и λ, разложив $B(\vec{\rho})$ в ряд Тэйлора по степеням $\vec{\rho} \to \vec{p}$ с остаточным членом порядка $|\vec{\rho} - \vec{p}|^2$ и переходя к пределу при $\Delta \to 0$ под знаками интегралов, получим

$$I = \int_R B(\vec{p})\, dV_{\vec{p}} \int_\Omega \int_\Lambda a(S, L \mid \vec{p}, \vec{\sigma}, \lambda, t) f(\vec{p}, d\Omega_{\vec{\sigma}}, d\lambda, t \mid \vec{r}, \vec{s}, l, \tau) +$$

$$+ \int_R \nabla_{\vec{p}} B(\vec{p})\, dV_{\vec{p}} \int_S \int_L \vec{\sigma} u_\lambda(\vec{p}, \vec{\sigma}, t) f(\vec{p}, d\Omega_{\vec{\sigma}}, d\lambda, t \mid \vec{r}, \vec{s}, l, \tau).$$

При предельном переходе $\Delta \to 0$ используются формулы (5) и (6) и то обстоятельство, что вторые моменты величины $\vec{\rho}(\tau + \Delta) - \vec{\rho}(\tau)$ бесконечно

малы относительно Δ. Произведя во втором слагаемом в I интегрирование по $\vec{p}$ по частям и пользуясь произвольностью функции $B(\vec{p})$, получим в результате уравнение

$$\frac{\partial f(\vec{\rho}, S, L, t \mid \vec{r}, \vec{s}, l, \tau)}{\partial t} + \int\limits_S \int\limits_L \vec{\sigma} \cdot \nabla_{\vec{\rho}} u_\lambda(\vec{\rho}, \vec{\sigma}, t) f(\vec{\rho}, d\Omega_{\vec{\sigma}}, d\lambda, t \mid \vec{r}, \vec{s}, l, \tau) =$$
$$= \int\limits_\Omega \int\limits_\Lambda a(S, L \mid \vec{\rho}, \vec{\sigma}, \lambda, t) f(\vec{\rho}, d\Omega_{\vec{\sigma}}, d\lambda, t \mid \vec{r}, \vec{s}, l, \tau).$$

Умножив обе части этого уравнения на $Q(\vec{r}, d\Omega_{\vec{s}}, dl, \tau)$ и интегрируя по $\vec{r}, \vec{s}, l$, получим следующее уравнение для Q:

$$\frac{\partial Q(\vec{\rho}, S, L, t)}{\partial t} + \int\limits_S \int\limits_L \vec{\sigma} \cdot \nabla_{\vec{\rho}} u_\lambda(\vec{\rho}, \vec{\sigma}, t) Q(\vec{\rho}, d\Omega_{\vec{\sigma}}, d\lambda, t) =$$
$$= \int\limits_\Omega \int\limits_\Lambda a(S, L \mid \vec{\rho}, \vec{\sigma}, \lambda, t) Q(\vec{\rho}, d\Omega_{\vec{\sigma}}, d\lambda, t). \qquad (7)$$

Учитывая, что частица может с конечной вероятностью оказаться в момент t в поглощенном состоянии (т. е. с энергией λ_0), положим

$$Q(\vec{\rho}, S, L, t) = Q_0(\vec{\rho}, t) F(\lambda_0, L) + \int\limits_S \int\limits_L q_\lambda(\vec{\rho}, \vec{\sigma}, t) d\Omega_{\vec{\sigma}} d\lambda, \qquad (8)$$

где $Q_0(\vec{\rho}, t) = Q(\vec{\rho}, \Omega, \lambda_0, t)$ — плотность распределения поглощенных частиц в пространстве, а $q_\lambda(\vec{\rho}, \vec{\sigma}, t)$ — плотность вероятностей для $\vec{\rho}(t)$, $\vec{\sigma}(t)$, $\lambda(t)$ при $\lambda(t) \neq \lambda_0$, доопределенная в точке $\lambda = \lambda_0$ по непрерывности. Вероятность того, что частица в момент t находится в неполощенном состоянии, равна

$$\int\limits_R \int\limits_\Omega \int\limits_\Lambda q_\lambda(\vec{\rho}, \vec{\sigma}, t) dV_{\vec{\rho}} d\Omega_{\vec{\sigma}} d\lambda = 1 - \int\limits_R Q_0(\vec{\rho}, t) dV_{\vec{\rho}}.$$

Чтобы получить из (7) уравнения для плотностей веротности $Q_0(\vec{\rho}, t)$ и $q_\lambda(\vec{\rho}, \vec{\sigma}, t)$, необходимо конкретизировать характер возможных актов рассеяния, т. е. вид функции $a(S, L \mid \vec{\rho}, \vec{\sigma}, \lambda, t)$. Мы рассмотрим весьма общий случай, когда вероятность перехода $P(R, S, L, t \mid \vec{r}, \vec{s}, l, \tau)$ при $l \neq \lambda_0$ может быть представлена в виде

$$P(R, S, L, t \mid \vec{r}, \vec{s}, l, \tau) = P(R, \Omega, \lambda_0, t \mid \vec{r}, \vec{s}, l, \tau) F(\lambda_0, L) +$$
$$+ P(R, \vec{s}, l, t \mid \vec{r}, \vec{s}, l, \tau) F(l, L) F(\vec{s}, S) + F(l, L) \int\limits_S \varphi(\vec{\sigma}, t \mid \vec{r}, \vec{s}, l, \tau) d\Omega_{\vec{\sigma}} +$$
$$+ F(\vec{s}, S) \int\limits_L \varphi'(\lambda, t \mid \vec{r}, \vec{s}, l, \tau) d\lambda + \int\limits_S \int\limits_L \varphi''(\vec{\sigma}, \lambda, t \mid \vec{r}, \vec{s}, l, \tau) d\Omega_{\vec{\sigma}} d\lambda, \qquad (9)$$

где слагаемые в правой части означают соответственно условные вероятности осуществления за время $t - \tau$ следующих событий: (а) произойдет поглощенне; (б) поглощения не произойдет, $\vec{\sigma}$ и λ не изменятся; (в) λ не изменится, а $\vec{\sigma}$ изменится и попадет в множество S; (2) поглощения не произойдет, $\vec{\sigma}$ не изменится, а λ изменится и попадет в множество L;

(д) поглощения не произойдет, $\vec{\sigma}$ и λ изменятся и попадут соответственно в множества S и L. В последних трех случаях мы допускаем существование плотностей вероятностей для $\vec{\sigma}(t)$, $\lambda(t)$ и $\{\vec{\sigma}(t), \lambda(t)\}$ соответственно и обозначаем φ, φ', φ'' эти плотности вероятностей, доопределенные по непрерывности в точках $\vec{\sigma} = \vec{s}$, $\lambda = l$ и $\lambda = \lambda_0$.

В (5) мы уже предположили дифференцируемость величины (9) по t в точке $t = \tau$. Примем следующие обозначения:

Функция от t	Производная по t в точке $t=\tau$
$P(R, \Omega, \lambda_0, t \mid \vec{r}, \vec{s}, l, \tau)$	$\gamma_l(\vec{r}, \vec{s}, \tau)$
$P(R, \vec{s}, l, t \mid \vec{r}, \vec{s}, l, \tau)$	$b_l(\vec{r}, \vec{s}, \tau)$
$P(R, \Omega-\vec{s}, l, t \mid \vec{r}, \vec{s}, l, \tau)$	$\beta_l(\vec{r}, \vec{s}, \tau)$
$P(R, \vec{s}, \Lambda-l-\lambda_0, t \mid \vec{r}, \vec{s}, l, \tau)$	$\beta'_l(\vec{r}, \vec{s}, \tau)$
$P(R, \Omega-\vec{s}, \Lambda-l-\lambda_0, t \mid \vec{r}, \vec{s}, l, \tau)$	$\beta''_l(\vec{r}, \vec{s}, \tau)$
$\varphi(\vec{\sigma}, t \mid \vec{r}, \vec{s}, l, \tau)$	$\beta_l(\vec{r}, \vec{s}, \tau)\,\alpha_l(\vec{\sigma} \mid \vec{r}, \vec{s}, \tau)$
$\varphi'(\lambda, t \mid \vec{r}, \vec{s}, l, \tau)$	$\beta'_l(\vec{r}, \vec{s}, \tau)\,\alpha'_l(\lambda \mid \vec{r}, \vec{s}, \tau)$
$\varphi''(\vec{\sigma}, \lambda, t \mid \vec{r}, \vec{s}, l, \tau)$	$\beta''_l(\vec{r}, \vec{s}, \tau)\,\alpha''_l(\vec{\sigma}, \lambda \mid \vec{r}, \vec{s}, \tau)$

При $t \to \tau$ предел второй величины из первого столбца равен единице, а пределы первой, третьей, четвертой и пятой величин — нулю. Поскольку сами эти величины неотрицательны и не превосходят единицы, ясно, что γ_l, β_l, β'_l и β''_l неотрицательны, а $b_l \leqslant 0$. Далее, сумма первых пяти величин первого столбца равна единице, так что сумма их производных равна нулю. Следовательно,

$$b_l = -(\gamma_l + \beta_l + \beta'_l + \beta''_l).$$

Величина γ_l имеет смысл коэффициента поглощения (за малое время Δ поглощение происходит с вероятностью $\gamma_l \Delta$). Величины β_l, β'_l и β''_l суть частоты актов рассеяния следующих типов: (A) при рассеянии меняется только направление движения, но не энергия; (A') при рассеянии меняется только энергия, но не направление движения; (A'') при рассеянии меняется почти наверное и энергия, и направление движения. Рассеяния типа A («монохроматические») имеют место, например, для длинноволновых фотонов: в атоме, поглотившем фотон, электрон «перескакивает» на более высокий энергетический уровень и затем возвращается обратно, причем атом излучает такой же фотон в новом направлении. Рассеяния типа A' имеют место для частиц очень больших энергий, которые движутся в среде прямолинейно, лишь теряя при рассеянии часть энергии на ионизацию среды. Рассеяния типа A'' имеют место, например, для жестких фотонов (эффект Комптона) и для нейтронов (неупругое рассеяние быстрых нейтронов, упругое рассеяние).

Согласно определению функций α_l, α'_l и α''_l, интегралы $\int_\Omega \alpha_l d\Omega_{\vec{\sigma}}$,

$\int\limits_{\Lambda} \alpha_l' d\lambda$ и $\int\limits_{\Omega}\int\limits_{\Lambda} \alpha_l'' d\Omega_{\vec{\rho}}\, d\lambda$ равны единице. Функции α_l, α_l' и α_l'' имеют смысл условных плотностей вероятности для $\vec{\sigma}(t+0)$, $\lambda(t+0)$ и $\{\vec{\sigma}(t+0), \lambda(t+0)\}$ при условии, что в момент t в точке $\vec{r}$ произошло рассеяние типа A, A' или A'' соответственно, причем до рассеяния частица двигалась по направлению $\vec{s}$ с энергией l. Функцию α_l можно назвать индикатрисой монохроматического рассеяния.

Подставляя формулу (9) в (5) и пользуясь перечисленными обозначениями, имеем

$$a(S, L|\vec{r}, \vec{s}, l, \tau) = \gamma_l(\vec{r}, \vec{s}, \tau) F(\lambda_0, L) - [\gamma_l(\vec{r}, \vec{s}, \tau) + \beta_l(r, \vec{s}, \tau) + \beta_l'(\vec{r}, s, \tau) + \beta_l''(\vec{r}, \vec{s}, \tau)] F(l, L) F(\vec{s}, S) + F(l, L)\, \beta_l(\vec{r}, \vec{s}, \tau) \int\limits_{S} \alpha_l(\vec{\sigma}|\vec{r}, \vec{s}, \tau)\, d\Omega_{\vec{\sigma}} + F(\vec{s}, S)\, \beta_l'(\vec{r}, \vec{s}, \tau) \int\limits_{L} \alpha_l'(\lambda|\vec{r}, \vec{s}, \tau)\, d\lambda + \beta_l''(\vec{r}, \vec{s}, \tau) \int\limits_{S}\int\limits_{L} \alpha_l''(\vec{\sigma}, \lambda|\vec{r}, \vec{s}, \tau)\, d\Omega_{\vec{\sigma}}\, d\lambda. \tag{10}$$

Подставляя формулы (8) и (10) в уравнение (7), рассматривая случай $\lambda_0 \bar{\in} L$ и пользуясь произвольностью множеств S и L, мы получим следующее уравнение для функции $q_\lambda(\vec{\rho}, \vec{\sigma}, t)$:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \vec{\sigma}\cdot\nabla_{\vec{\rho}} u_\lambda(\vec{\rho}, \vec{\sigma}, t) + \gamma_\lambda(\vec{\rho}, \vec{\sigma}, t) + \beta_\lambda(\vec{\rho}, \vec{\sigma}, t) + \beta_\lambda'(\vec{\rho}, \vec{\sigma}, t)\right] + \beta_\lambda''(\vec{\rho}, \vec{\sigma}, t)] q_\lambda(\vec{\rho}, \vec{\sigma}, t) = \int\limits_{\Omega} \beta_\lambda(\vec{\rho}, \vec{s}, t)\, \alpha_\lambda(\vec{\sigma}|\vec{\rho}, \vec{s}, t)\, q_\lambda(\vec{\rho}, \vec{s}, t)\, d\Omega_{\vec{s}} + \int\limits_{\Lambda} \beta_l'(\vec{\rho}, \vec{\sigma}, t)\, \alpha_l'(\lambda|\vec{\rho}, \vec{\sigma}, t)\, q_l(\vec{\rho}, \vec{\sigma}, t)\, dl + \int\limits_{\Omega}\int\limits_{\Lambda} \beta_l''(\vec{\rho}, \vec{s}, t)\, \alpha_l''(\vec{\sigma}, \lambda|\vec{\rho}, \vec{s}, t)\, q_l(\vec{\rho}, \vec{s}, t)\, d\Omega_{\vec{s}}\, dl.$$

Рассматривая в (7) случай $L = \lambda_0$, мы получим следующее уравнение для определения плотности распределения поглощенных частиц в пространстве:

$$\frac{\partial Q_0(\vec{\rho}, t)}{\partial t} = \int\limits_{\Omega}\int\limits_{\Lambda} \gamma_l(\vec{\rho}, \vec{\sigma}, t)\, q_l(\vec{\rho}, \vec{\sigma}, t)\, d\Omega_{\vec{\sigma}}\, dl. \tag{12}$$

Уравнения (11)—(12) описывают процессы рассеяния и поглощения (в областях, не содержащих источников частиц) в неоднородной и анизотропной среде, характеристики которой могут зависеть также от времени. При этом величина $q_\lambda(\vec{\rho}, \vec{\sigma}, t)$ пропорциональна так называемой спектральной интенсивности излучения, γ_λ, β_λ, β_λ' и β_λ''—спектральным коэффициентам поглощения и рассеяния соответственно.

Кинетическое уравнение (11) можно формально переписать в виде

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \vec{\sigma}\cdot\nabla_{\vec{\rho}} u_\lambda(\vec{\rho}, \vec{\sigma}, t) + \beta_\lambda(\vec{\rho}, \vec{\sigma}, t) + \eta_\lambda(\vec{\rho}, \vec{\sigma}, t)\right] q_\lambda(\vec{\rho}, \vec{\sigma}, t) = \int\limits_{\Omega} \beta_\lambda(\vec{\rho}, \vec{\sigma}, t)\, \alpha_\lambda(\vec{\sigma}|\vec{\rho}, \vec{s}, t)\, q_\lambda(\vec{\rho}, \vec{s}, t)\, d\Omega_{\vec{s}} + \varepsilon_\lambda(\vec{\rho}, \vec{\sigma}, t), \tag{13}$$

где $\eta_\lambda = \gamma_\lambda + \beta'_\lambda + \beta''_\lambda$ — эффективный коэффициент поглощения для частиц с энергией λ, описывающий как необратимое поглощение, так и «исчезновение» этих частиц в результате их превращения в частицы других энергий, а ε_λ — плотность (в R и Ω) источников частиц с энергией λ, которая может включать как «рождение» этих частиц в результате рассеяния типов A' и A'' частиц других энергий, так и внешние источники (например, в случае фотонов, тепловое излучение среды).

Если плотность источников ε_λ можно считать известной, то уравнение (13) позволит изучать эволюцию каждой спектральной компоненты ансамбля частиц независимо от других спектральных компонент, учитывая в явном виде лишь монохроматическое рассеяние. Такая упрощенная постановка задачи широко используется для анализа поля излучения в астрофизике и физике атмосферы; например, если исследуется собственное поле излучения нагретой среды, то «коэффициент излучения» ε_λ пропорционален известной функции излучения абсолютно-черного тела. Если происходит только монохроматическое рассеяние, то уравнение (13) является исчерпывающим.

Как уже отмечалось, рассеяние нейтронов происходит по типу A''. Однако в случае тепловых нейтронов можно приближенно использовать уравнение вида (13), формально соответствующее монохроматическому рассеянию. В этом случае уравнению (13) можно придать следующий строгий смысл. Будем интересоваться лишь числом нейтронов, но не их энергией, и допустим, что для блуждающего нейтрона случайные функции $\vec{\rho}(t)$, $\vec{\sigma}(t)$ совместно образуют марковский процесс. Тогда для безусловной плотности вероятностей $q(\vec{\rho}, \vec{\sigma}, t)$ может быть выведено, аналогично предыдущему, уравнение вида (13) (при $\varepsilon_\lambda = 0$), в котором вместо u_λ, β_λ, η_λ, α_λ будут фигурировать некоторые средние характеристики u, β, η, α, приближенно соответствующие значениям спектральных характеристик для средней энергии тепловых нейтронов (заметим, кстати, что для тепловых нейтронов коэффициент рассеяния β и индикатриса рассеяния α мало зависят от энергии, причем индикатриса рассеяния близка к сферической: $\alpha(\vec{\sigma}\,|\,\vec{\rho}, \vec{s}, t) \approx \frac{1}{|\Omega|}$, где $|\Omega|$ — площадь единичной сферы). Таким образом, рассеяние тепловых нейтронов может быть приближенно схематизировано как рассеяние типа A для моноэнергетических нейтронов, энергия которых соответствует температуре среды.

§ 2. Монохроматическое рассеяние в однородной и изотропной среде

В случае однородной и изотропной среды со стационарными характеристиками величины u_λ, γ_λ, β_λ, β'_λ, β''_λ не будут зависеть от $\vec{\rho}$, $\vec{\sigma}$, t, а величины α_λ, α'_λ, α''_λ не будут зависеть от $\vec{\rho}$, t. Кроме того, α'_λ не будет зависеть и от $\vec{\sigma}$, а величины α_l и α''_l будут зависеть не от $\vec{\sigma}$ и $\vec{s}$ по-отдельности, а лишь от косинуса угла между $\vec{\sigma}$ и $\vec{s}$ (т. е. от скалярного произведения $\vec{\sigma}\cdot\vec{s}$).

Далее мы ограничимся рассмотрением монохроматического рассеяния в неограниченной однородной и изотропной среде. Опуская в уравнении

(13) индекс λ, мы можем записать его в рассматриваемом случае в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u\vec{s}\cdot\nabla_{\vec{r}} + \beta + \eta\right) q(\vec{r}, \vec{s}, t) = \beta \int_{\Omega} \alpha(\vec{s}\cdot\vec{\sigma})\, q(\vec{r}, \vec{\sigma}, t)\, d\Omega_{\vec{\sigma}} + \varepsilon(\vec{r}, \vec{s}, t).$$

Решение этого уравнения при произвольной правой части $\varepsilon(\vec{r}, \vec{s}, t)$ и произвольном начальном условии $q(\vec{r}, \vec{s}, 0) = \varphi_0(\vec{r}, \vec{s})$ может быть определено формулой

$$q(\vec{r}, \vec{s}, t) = e^{-\eta t} \int_R \int_{\Omega} q(\vec{r} - \vec{\rho}, \vec{s}, t \mid \vec{\sigma})\, \varphi_0(\vec{\rho}, \vec{\sigma})\, dV_{\vec{\rho}}\, d\Omega_{\vec{\sigma}} +$$

$$+ \int_0^t e^{-\eta(t-\tau)} ds \int_R \int_{\Omega} q(\vec{r} - \vec{\rho}, \vec{s}, t - \tau \mid \vec{\sigma})\, \varepsilon(\vec{\rho}, \vec{\sigma}, \tau)\, dV_{\vec{\rho}}\, d\Omega_{\vec{\sigma}},$$

где $q(\vec{r}, \vec{s}, t \mid \vec{s}_0)$ — основное решение (для неограниченного пространства) уравнения

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u\vec{s}\cdot\nabla_{\vec{r}} + \beta\right) q(\vec{r}, \vec{s}, t) = \beta \int_{\Omega} \alpha(\vec{s}\cdot\vec{\sigma})\, q(\vec{r}, \vec{\sigma}, t)\, d\Omega_{\vec{\sigma}}, \qquad (14)$$

т. е. решение, удовлетворяющее начальному условию $\varphi_0(\vec{r}, \vec{s}) = \delta(\vec{r}) \times \delta(\vec{s} - \vec{s}_0)$ (здесь и далее символом δ обозначается дельта-функция Дирака) и имеющее смысл интенсивности излучения при наличии в точке $\vec{r} = 0$ в момент $t = 0$ единичного мгновенного направленного точечного источника, испустившего частицы в направлении $\vec{s}_0$. Ниже мы будем интересоваться также решением $q_0(\vec{r}, \vec{s}, t)$, удовлетворяющим начальному условию $\varphi_0(\vec{r}, \vec{s}) = \frac{1}{|\Omega|}\delta(\vec{r})$ (мгновенный точечный источник, излучающий во все стороны равномерно). Решения $q(\vec{r}, \vec{s}, t \mid \vec{s}_0)$ и $q_0(\vec{r}, \vec{s}, t)$, очевидно, отличны от нуля лишь при $r \leqslant ut$, что в дальнейшем всюду будет подразумеваться без дополнительных оговорок.

Уравнение (14) описывает чистое рассеяние (при отсутствии поглощения и излучения среды). Марковский случайный процесс $\{\vec{\rho}(t), \vec{\sigma}(t)\}$, которому соответствует это уравнение, реализуется при таком случайном блуждании частицы, когда она движется прямолинейно со скоростью u и в случайные моменты времени испытывает рассеяния, т. е. меняет направление движения (причем плотность вероятности для нового направления $\vec{s}$ равна $\alpha(\vec{s}\cdot\vec{\sigma})$, где $\vec{\sigma}$ — старое направление); число рассеяний $\nu(t)$, которые претерпевает частица за время t, является случайной величиной, имеющей распределение Пуассона с параметром βt (так как β — частота рассеяний). Конкретными реализациями этого процесса при начальных условиях $\vec{\rho}(0) = 0$, $\vec{\sigma}(0) = \vec{s}_0$ являются пары функций $\vec{r}(t)$ и $\vec{s}(t) = \vec{r}'(t)/|\vec{r}'(t)|$, удовлетворяющих указанным начальным условиям, где $\vec{r}(t)$ — траектория индивидуальной частицы, а штрих означает производную справа по t.

Поскольку каждая траектория $\vec{r}(t)$ является ломаной линией со счетным числом вершин (точки рассеяния) и вполне определяется заданием

последовательности вершин $\{\vec{r}_n\}$, описание марковского процесса $\{\vec{\rho}(t), \vec{\sigma}(t)\}$ сводится к описанию последовательности $\{\vec{\rho}_n\}$ случайных точек рассеяния. Полным описанием этой последовательности будет задание при любом n совместной плотности вероятностей $p(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_n)$ координат первых n точек рассеяния. Обозначив $\vec{\sigma}_k$ единичный вектор направления из $\vec{\rho}_k$ в $\vec{\rho}_{k+1}$, т. е.

$$\vec{\sigma} = \frac{\vec{\rho}_{k+1} - \vec{\rho}_k}{|\vec{\rho}_{k+1} - \vec{\rho}_k|},$$

и учитывая, что распределение вероятностей для случайного вектора $\vec{\rho}_k$ зависит лишь от значений $\vec{\rho}_{k-1}$ и $\vec{\sigma}_{k-2}$, имеем

$$p(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_n) = f(\vec{r}_n \mid \vec{r}_{n-1}, \vec{s}_{n-2})\, p(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_{n-1}) = \prod_{k=2}^{n} f(\vec{r}_k \mid \vec{r}_{k-1}, \vec{s}_{k-2}) \cdot p(\vec{r}_1),$$

где $f(\vec{r}_k \mid \vec{r}_{k-1}, \vec{s}_{k-2})$ — условная плотность вероятностей для $\vec{\rho}_k$ при фиксированных $\vec{\rho}_{k-1} = \vec{r}_{k-1}$ и $\vec{\sigma}_{k-2} = \vec{s}_{k-2}$, которая вследствие пространственной однородности процесса имеет вид $f_1(\vec{r}_k - \vec{r}_{k-1} \mid \vec{s}_{k-2})$. Для определения функции $f_1(\vec{\rho} \mid \vec{s})$ заметим, что длина ρ и направление $\vec{\sigma}$ вектора $\vec{\rho}$ независимы друг от друга, причем распределение для ρ не зависит от $\vec{s}$, а распределение для $\vec{\sigma}$ имеет плотность $\alpha(\vec{\sigma} \cdot \vec{s})$. Таким образом, имеем

$$f_1(\vec{\rho} \mid \vec{s})\, dV_{\vec{\rho}} = f_1(\vec{\rho} \mid \vec{s})\, \rho^2\, d\rho\, d\Omega_{\vec{\sigma}} = f_2(\rho)\, d\rho \cdot \alpha(\vec{\sigma} \cdot \vec{s})\, d\Omega_{\vec{\sigma}},$$

где $f_2(\rho)$ — плотность вероятностей для ρ. Длина ρ расстояния между последовательными точками рассеяния равна $u\tau$, где τ — время между последовательными рассеяниями. Событие $\tau \geqslant t$ означает, что на промежутке времени длиной t не произошло ни одного рассеяния, и имеет вероятность $\mathbf{P}\{\nu(t) = 0\} = e^{-\beta t}$, так как число рассеяний $\nu(t)$ имеет распределение Пуассона с параметром βt. Отсюда следует, что плотность вероятности для τ равна $\beta e^{-\beta t}$, и, следовательно, плотность вероятности для ρ равна $f_2(\rho) = \frac{\beta}{u} e^{-\frac{\beta}{u}\rho}$. Используя эти результаты, имеем

$$f_1(\vec{\rho} \mid \vec{s}) = \frac{\beta}{u\rho^2} e^{-\frac{\beta}{u}\rho}\, \alpha(\vec{\sigma} \cdot \vec{s}).$$

Плотность вероятностей $p(\vec{r}_1)$ отличается от $f_1(\vec{r}_1 \mid \vec{s})$ тем, что вместо $\alpha(\vec{\sigma} \cdot \vec{s})$ в ней должен фигурировать множитель $\delta(\vec{\sigma} - \vec{s}_0)$. Таким образом, имеем

$$p(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_n) = \prod_{k=2}^{n} x_k^{-2} \alpha\left(\frac{\vec{x}_k \cdot \vec{x}_{k-1}}{x_k x_{k-1}}\right) \cdot x_1^{-2} \delta\left(\frac{\vec{x}_1}{x_1} - \vec{s}_0\right) \cdot \left(\frac{\beta}{u}\right)^n e^{-\frac{\beta}{u}\sum_{k=1}^{n} x_k}, \quad (15)$$

где приняты обозначения $\vec{x}_k = \vec{r}_k - \vec{r}_{k-1}$, $x_k = |\vec{x}_k|$ и $\vec{r}_0 = 0$. Третий из множителей в этой формуле имеет смысл совместной плотности вероятностей для случайных величин $\xi_k = |\vec{\rho}_k - \vec{\rho}_{k-1}|$.

Другой формой описания марковского процесса $\{\vec{\rho}(t), \vec{\sigma}(t)\}$ является задание меры $W(dC)$ на множестве C всевозможных траекторий блуждающей частицы, которые мы будем рассматривать лишь на интервале времени $(0, t)$. Иначе говоря, множество C состоит из всевозможных ломаных линий длины ut, имеющих конечное число вершин и выходящих из точки $\vec{r}_0 = 0$ в направлении $\vec{s}_0$. Это множество является суммой множеств C_n, $n = 0,1,2, \ldots$, состоящих из ломаных с n вершинами, причем мера множества C_n, очевидно, равна

$$W(C_n) = \mathbf{P}\{\nu(t) = n\} = \frac{(\beta t)^n}{n!} e^{-\beta t}.$$

При этом C_0 состоит из одной прямой (с направлением $\vec{s}_0$), на которой сосредоточена конечная мера $e^{-\beta t}$. Нам будет удобно в дальнейшем задавать случайную ломаную из C_n не координатами вершин $\vec{\rho}_1, \ldots, \vec{\rho}_n$, а соответствующими этим вершинам моментами времени $\tau_1 = t\theta_1, \ldots, \tau_n = t\theta_n$ и направлениями последовательных звеньев $\vec{\sigma}_1, \ldots, \vec{\sigma}_n$. При таком выборе параметров ломаной мера на C_n будет определяться плотностью вероятностей

$$\frac{(\beta t)^n}{n!} e^{-\beta t} w(t_1, \ldots, t_n; \vec{s}_1, \ldots, \vec{s}_n),$$

где w — совместная плотность вероятностей для случайных величин $\theta_1, \ldots, \theta_n; \vec{\sigma}_1, \ldots, \vec{\sigma}_n$. Для любого функционала $\Psi[\vec{r}(\tau)]$ на множестве C интеграл по мере W может быть определен формулой

$$\int_C \Psi[\vec{r}(\tau)] W(dC) = e^{-\beta t}\psi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\beta t)^n}{n!} e^{-\beta t} \times$$
$$\times \int \ldots \int \psi(t_1, \ldots, t_n; \vec{s}_1, \ldots, \vec{s}_n) \times$$
$$\times w(t_1, \ldots, t_n; \vec{s}_1, \ldots, \vec{s}_n)\, dt_1 \ldots dt_n\, d\Omega_{\vec{s}_1} \ldots d\Omega_{\vec{s}_n}. \qquad (16)$$

где ψ_0 — значение функционала Ψ на C_0, а $\psi(t_1, \ldots, t_n; \vec{s}_1, \ldots, \vec{s}_n)$ — значение Ψ на ломаной из C_n с параметрами $\theta_1 = t_1, \ldots, \theta_n = t_n$; $\vec{\sigma}_1 = \vec{s}_1, \ldots, \vec{\sigma}_n = \vec{s}_n$.

Чтобы определить плотность вероятностей w, заметим, что величины $\vec{\sigma}_1, \ldots, \vec{\sigma}_n$ не зависят от $\theta_1, \ldots, \theta_n$ и имеют совместную плотность вероятностей $\prod_{k=1}^{n} \alpha(\vec{s}_k \cdot \vec{s}_{k-1})$. Когда известно, что на интервале времени $(0, t)$ осуществилось ровно n рассеяний, моменты этих рассеяний можно считать независимыми случайными величинами, имеющими равномерное распределение по интервалу $(0, t)$. Следовательно, величины θ_k равномерно распределены по интервалу $(0,1)$. Они, кроме того, должны удовлетворять условию $\theta_1 < \theta_2 < \ldots < \theta_n$, вероятность которого равна $\mathbf{P}\{\theta_1 < \theta_2 < \ldots < \theta_n\} = \frac{1}{n!}$ (объем n-мерного симплекса). Таким образом, совместная плотность вероятностей для $\theta_1, \ldots, \theta_n$ равна $n!$ при $0 < \theta_1 < \ldots < \theta_n < 1$ и нулю в остальных случаях. Окончательно, $w(t_1, \ldots, t_n; \vec{s}_1, \ldots, \vec{s}_n)$

равно $n!\prod_{k=1}^{n}\alpha(\vec{s}_k\cdot\vec{s}_{k-1})$ при $0<t_1<\ldots<t_n<1$ и нулю в остальных случаях.

Рассмотрим следующий важный пример интегрирования по мере W. Основное решение $q(\vec{r},\vec{s},t\mid\vec{s}_0)$ уравнения (14) при $r\leqslant ut$ может быть представлено в виде

$$q(\vec{r},\vec{s},t\mid\vec{s}_0)=\int_C\delta(\vec{r}-\vec{r}(t))\,\delta(\vec{s}-\vec{s}(t))W(dC)$$

Заметив, что на C_0 будет $\vec{r}(t)=ut\vec{s}_0$ и $\vec{s}(t)=\vec{s}_0$, а на C_n

$$\vec{r}(t)=ut\sum_{k=0}^{n}\vec{s}_k(\theta_{k+1}-\theta_k)=ut\vec{s}_n+ut\sum_{k=1}^{n}(\vec{s}_{k-1}-\vec{s}_k)\theta_k,\quad \vec{s}(t)=\vec{s}_n,$$

где $\theta_0=0$, $\theta_{n+1}=1$, и пользуясь формулой (16), получим

$$q(\vec{r},\vec{s},t\mid\vec{s}_0)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\beta t)^n}{n!}e^{-\beta t}f_n(\vec{r},\vec{s},t\mid\vec{s}_0),\tag{17}$$

где

$$f_0(\vec{r},\vec{s},t\mid\vec{s}_0)=\delta(\vec{r}-ut\vec{s}_0)\,\delta(s-\vec{s}_0);$$

$$f_n(\vec{r},\vec{s},t\mid\vec{s}_0)=n!\int_{\Omega}\ldots\int_{\Omega}\alpha(\vec{s}_0\cdot\vec{s}_1)\,\alpha(\vec{s}_1\cdot\vec{s}_2)\ldots\alpha(\vec{s}_{n-1}\cdot\vec{s})\,d\Omega_{\vec{s}_1}\ldots d\Omega_{\vec{s}_{n-1}}\times$$

$$\times\int_0^1 d\theta_n\int_0^{\theta_n}d\theta_{n-1}\ldots\int_0^{\theta_2}\delta\Big[\vec{r}-ut\vec{s}-ut\sum_{k=1}^{n}(\vec{s}_{k-1}-\vec{s}_k)\theta_k\Big]d\theta_1\tag{18}$$

— условная плотность вероятностей для $\vec{\rho}(t)$, $\vec{\sigma}(t)$ при условиях $\vec{\rho}(0)=0$, $\vec{\sigma}(0)=\vec{s}_0$ и $\nu(t)=n$. Формула (17), представляющая собой разложение по кратности рассеяний, является просто формулой полной вероятности. Подставляя эту формулу в уравнение (14), мы получим следующую рекуррентную формулу:

$$t^n f_n(\vec{r},\vec{s},t\mid\vec{s}_0)=$$

$$=n\int_{\Omega}\alpha(\vec{\sigma}\cdot\vec{s})\,d\Omega_{\vec{\sigma}}\int_0^{\frac{|\vec{r}-ut\vec{s}\,|^2}{2u(ut-\vec{r}\cdot\vec{s})}}\theta^{n-1}f_{n-1}(\vec{r}-ut\vec{s}+u\theta\vec{s},\sigma,\vec{\theta}\mid\vec{s}_0)\,d\theta.\tag{19}$$

С помощью (18) или (19) для однократного рассеяния получается

$$f_1(\vec{r},\vec{s},t\mid\vec{s}_0)=\frac{2^{m-2}\,|\vec{\rho}\cdot\vec{s}_0\,|^{m-3}}{ut\rho^{2m-4}}\,\alpha\left[1-2\left(\frac{\vec{\rho}\cdot\vec{s}_0}{\rho}\right)^2\right]\delta\left(\vec{s}-\vec{s}_0+2\,\frac{\vec{\rho}}{\rho}\,\frac{\vec{\rho}\cdot\vec{s}_0}{\rho}\right),\tag{20}$$

где $\vec{\rho}=\vec{r}-ut\vec{s}_0$, m — размерность пространства. Наличие здесь дельта-функции связано с тем, что при фиксированном $\vec{s}_0$ попасть за время t в точку $\vec{r}(r\leqslant ut)$, претерпев по дороге одно рассеяние, можно лишь единственным способом. Вычисление интегралов (18) или (19) при $n\geqslant 2$ уже требует знания конкретного вида индикатрисы рассеяния.

§ 3. Случай сферической индикатрисы рассеяния

Остановимся подробнее на простейшем случае, когда направление движения частицы после рассеяния не зависит от направления движения до рассеяния, так что после рассеяния все направления движения равновероятны. В этом случае $\alpha(\vec{\sigma}\cdot\vec{s}) \equiv \frac{1}{|\Omega|}$, и уравнение (10) принимает вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{us}\cdot\nabla_{\vec{r}} + \beta\right) q(\vec{r}, \vec{s}, t) = \frac{\beta}{|\Omega|} g(\vec{r}, t), \tag{21}$$

где

$$g(\vec{r}, t) = \int_{\Omega} q(\vec{r}, \vec{s}, t)\, d\Omega_{\vec{s}} \tag{22}$$

— плотность частиц. Обратное соотношение между q и g имеет вид

$$q(\vec{r}, \vec{s}, t) = e^{-\beta t} q(\vec{r} - ut\vec{s}, \vec{s}, 0) + \frac{\beta}{|\Omega|} e^{-\beta t} \int\limits_{\frac{|\vec{r}-ut\vec{s}|^2}{2u(ut-\vec{r}\cdot\vec{s})}}^{t} e^{\beta\theta} g(\vec{r} - ut\vec{s} + u\theta\vec{s}, \theta)\, d\theta, \tag{23}$$

так что, вообще говоря, достаточно ограничиться определением какой-нибудь одной из этих двух функций.

Решение уравнений (21) — (22) при начальном условии $\varphi_0(\vec{r}, \vec{s}) = \delta(\vec{r})\varepsilon(\vec{s})$ можно получить, подвергнув их преобразованию Фурье по $\vec{r}$ и преобразованию Лапласа по t. Именно, положим

$$\tilde{q}(\vec{p}, \vec{s}, \theta) = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_R e^{-i\vec{p}\cdot\vec{r}}\, dV_{\vec{r}} \int_0^{\infty} e^{-\theta t} e^{\beta t} q(\vec{r}, \vec{s}, t)\, dt$$

и аналогичное преобразование для $g(\vec{r}, t)$ обозначим $\tilde{g}(\vec{p}, \theta)$. Решение преобразованных уравнений будет иметь вид

$$\tilde{q}(\vec{p}, \vec{s}, \theta) = \frac{1}{\theta + iu\vec{s}\cdot\vec{p}} \left[\frac{\beta}{|\Omega|} \tilde{g}(\vec{p}, \theta) + \frac{\varepsilon(\vec{s})}{(2\pi)^m}\right];$$

$$\tilde{g}(\vec{p}, \theta) = \frac{\dfrac{1}{(2\pi)^m} \displaystyle\int_{\Omega} \frac{\varepsilon(\vec{s})\, d\Omega_{\vec{s}}}{\theta + iu\vec{s}\cdot\vec{p}}}{1 - \dfrac{\beta}{|\Omega|} \displaystyle\int_{\Omega} \frac{d\Omega_{\vec{s}}}{\theta + iu\vec{s}\cdot\vec{p}}}.$$

Вычисление интегралов, входящих в эти формулы, осуществляется различно при различном числе m измерений пространства и различных $\varepsilon(\vec{s})$; однако из этих формул просто выводится любопытное свойство взаимности

$$g(\vec{r}, t \mid \vec{s}_0) = |\Omega|\, q_0(\vec{r}, \vec{s}_0, t), \tag{24}$$

которое, очевидно, будет иметь место и для стационарных источников. Используя это свойство и формулы (22) — (23), мы можем ограничиться определением какой-либо из функций $q_0(\vec{r}, \vec{s}, t)$ или $g_0(\vec{r}, t)$, так как через

них может быть выражено в интегральном виде решение уравнения (21) при любом $\varepsilon(\vec{s})$.

Для нахождения $q_0(\vec{r}, t)$ в случае рассеяния в плоскости ($m = 2$) удобно воспользоваться аналогичным (17) разложением по кратности рассеяний

$$g(\vec{r}, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta t)^n}{n!} e^{-\beta t} \varphi_n(\vec{r}, t) \tag{25}$$

и вытекающими из (19) рекуррентными формулами

$$\varphi_n(\vec{r}, t) = \int_{\Omega} f_n(\vec{r}, \vec{s}, t)\, d\Omega_{\vec{s}};$$

$$t^n f_n(\vec{r}, \vec{s}, t) = \frac{n}{2\pi} \int_{\frac{|\vec{r}-u\vec{t}\vec{s}|^2}{2u(ut-\vec{r}\cdot\vec{s})}}^{t} \theta^{n-1} \varphi_{n-1}(\vec{r} - u\vec{t}\vec{s} + u\theta\vec{s}, \theta)\, d\theta, \tag{26}$$

причем $f_0(\vec{r}, \vec{s}, t) = \frac{1}{2\pi}\delta(\vec{r} - ut\vec{s})$ и, следовательно, $\varphi_0(\vec{r}, t) = \frac{\delta(ut - r)}{2\pi ut}$. Используя интеграл по единичной окружности

$$\int_{\Omega} \frac{d\Omega_{\vec{s}}}{ut - \vec{r}\cdot\vec{s}} = \frac{2\pi}{\sqrt{u^2t^2 - r^2}},$$

по формулам (26) получим при $n \geqslant 1$:

$$f_n(\vec{r}, \vec{s}, t) = \frac{n\left(1 - \frac{r^2}{u^2t^2}\right)^{\frac{n-1}{2}}}{4\pi^2 ut\,(ut - \vec{r}\cdot\vec{s})}; \qquad \varphi_n(\vec{r}, t) = \frac{n\left(1 - \frac{r^2}{u^2t^2}\right)^{\frac{n-2}{2}}}{2\pi u^2 t^2}, \tag{27}$$

Эти формулы дают интенсивность излучения и плотность частиц при фиксированном числе рассеяний. Подставляя их в ряды (17) и (25) и суммируя эти ряды, получим

$$q_0(\vec{r}, \vec{s}, t) = \frac{e^{-\beta t}}{2\pi}\left[\delta(\vec{r} - u\vec{t}\vec{s}) + \frac{\beta e^{\beta t\sqrt{1 - \frac{r^2}{u^2t^2}}}}{2\pi u\,(ut - \vec{r}\cdot\vec{s})}\right]; \tag{28}$$

$$g_0(\vec{r}, t) = \frac{e^{-\beta t}}{2\pi ut}\left[\delta(r - ut) + \frac{\beta e^{\beta t\sqrt{1 - \frac{r^2}{u^2t^2}}}}{u\sqrt{1 - \frac{r^2}{u^2t^2}}}\right].$$

Распределение $g_0(\vec{r}, t)$ является дискретно-непрерывным. Дельта-функция отмечает фронт волны, доля находящихся на которой частиц убывает со временем по закону $e^{-\beta t}$. За фронтом волны имеется непрерывный «след», образованный частицами, испытавшими рассеяние. При $t \to \infty$ и фиксированном r распределение $g_0(\vec{r}, t)$ приближается к двумерному нормальному распределению с дисперсиями $\frac{u^2 t}{\beta}$ и нулевым коэффициентом корреляции:

$$g_0(\vec{r}, t) \sim \frac{\beta}{2\pi u^2 t} e^{-\frac{\beta r^2}{2u^2 t}}\left[1 + O(t^{-2})\right].$$

В случае рассеяния в пространстве ($m = 3$) использование рекуррентных формул (26) потребует вычисления громоздких интегралов, и мы воспользуемся следующим искусственным приемом, известным в литературе. Пусть $h(z, t)$ — плотность частиц, соответствующая наличию мгновенного источника, равномерно распределенного с единичной плотностью по плоскости $z = 0$, причем в момент $t = 0$ в любой точке этой плоскости частицы излучаются с одинаковой вероятностью по всем направлениям. Учитывая, что $g_0(\vec{r}, t)$ зависит лишь от модуля вектора $\vec{r}$, мы можем следующим образом выразить $h(z, t)$ через $g_0(r, t)$:

$$h(z, t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int g_0\left[\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2}, t\right] d\xi\, d\eta = 2\pi \int_z^{\infty} g_0(r, t)\, r\, dr.$$

Следовательно, зная $h(z, t)$, мы сможем определить $g_0(r, t)$ по формуле

$$g_0(r, t) = \frac{1}{2\pi r}\frac{\partial h(r, t)}{\partial r}, \tag{29}$$

так что определение $g_0(r, t)$ сводится к решению более простой одномерной задачи. В этой задаче интенсивность излучения имеет вид $q(z, \mu, t)$, где μ—косинус угла между осью z и направлением движения частицы, и уравнения (21) — (22) принимают вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u\mu\frac{\partial}{\partial z} + \beta\right) q(z, \mu, t) = \frac{\beta}{4\pi} h(z, t); \quad h(z, t) = 2\pi \int_{-1}^{+1} q(z, \mu, t)\, d\mu. \tag{30}$$

Начальное условие будет иметь вид $q(z, \mu, 0) = \frac{\delta(z)}{4\pi}$. Если в разложениях (17) для $q(z, \mu, t)$ и (25) для $h(z, t)$ положить, согласно требованиям размерности,

$$f_n(z, \mu, t) = \frac{1}{4\pi u t} F_n\left(\frac{z}{ut}, \mu\right); \quad \varphi_n(z, t) = \frac{1}{ut}\Phi_n\left(\frac{z}{ut}\right), \tag{31}$$

то уравнения (30) примут вид:

$$\left[(\mu - \xi)\frac{\partial}{\partial \xi} + n - 1\right] F_n(\xi, \mu) = n\Phi_{n-1}(\xi);$$
$$\Phi_n(\xi) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} F_n(\xi, \mu)\, d\mu, \tag{32}$$

где $\xi = \frac{z}{ut}$. При этом, согласно сформулированному начальному условию, $F_0(\xi, \mu) = \delta(\xi - \mu)$, так что $\Phi_0(\xi) \equiv \frac{1}{2}$ при $|\xi| \leqslant 1$ (при $|\xi| > 1$ функции (31) равны нулю). Продифференцируем первое уравнение (32) $n - 1$ раз по ξ, поделим полученное уравнение на $\mu - \xi$ и, пользуясь вторым уравнением (32), проинтегрируем по μ, в результате чего получим рекуррентное соотношение

$$\frac{d^n\Phi_n}{d\xi^n} = n\,\mathrm{arth}\,\xi \cdot \frac{d^{n-1}\Phi_{n-1}}{d\xi^{n-1}}.$$

Разрешив это соотношение и используя значение $\Phi_0(\xi)$, найдем

$$\frac{d^n\Phi_n}{d\xi^n} = \frac{n!}{2}(\operatorname{arth}\xi)^n.$$

Ниже мы докажем, что при $k \leqslant n-1$ производные $\frac{d^k\Phi_n}{d\xi^k}$ в точках $\xi = \pm 1$ равны нулю, так что в результате n-кратного интегрирования получаем

$$\Phi_n(\xi) = \frac{n}{2}\int_{-1}^{\xi}(\xi - x)^{n-1}(\operatorname{arth} x)^n\,dx. \tag{33}$$

Подставляя (31) и (33) в (25), окончательно получим

$$h(z,t) = \frac{e^{-\beta t}}{2ut}\left[1 + \beta t\int_{-1}^{z/ut} e^{\beta t\left(\frac{z}{ut} - x\right)\operatorname{arth} x}\operatorname{arth} x\,dx\right]. \tag{34}$$

Чтобы доказать высказанное утверждение относительно производных $\frac{d^k\Phi_n}{d\xi^k}$, положим

$$h(z,t) = e^{-\beta t}F(ut + z, ut - z)$$

и заметим, что функция $F(x,y)$ в области $x > 0$, $y > 0$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$F(x,y) = \frac{1}{x+y} + \frac{\beta}{2u}\int_0^x d\xi\int_0^y \frac{F(\xi,\eta)\,d\eta}{(x+y)-(\xi+\eta)}. \tag{35}$$

Это можно доказать, подвергая уравнение (30) преобразованию Фурье по z, решив полученное обыкновенное дифференциальное по t уравнение относительно Фурье-трансформации функции $e^{\beta t}q(z,\mu,t)$, проинтегрировав это решение по μ и совершив обратное преобразование Фурье. Из (35) можно получить рекуррентную формулу

$$\Phi_n(\xi) = \frac{n}{2}\int_{-1}^{\xi}\Phi_{n-1}(x)\,dx\int_0^{\frac{1-\xi}{1-x}}\frac{y^{n-1}\,dy}{1-y} + \frac{n}{2}\int_{\xi}^{1}\Phi_{n-1}(x)\,dx\int_0^{\frac{1+\xi}{1+x}}\frac{y^{n-1}\,dy}{1-y},$$

дифференцирование которой приводит к соотношению

$$\frac{d^k\Phi_n(\xi)}{d\xi^k} = \frac{n}{2}\int_{-1}^{\xi}\frac{d^k\Phi_{n-1}(x)}{dx^k}\,dx\int_0^{\frac{1-\xi}{1-x}}\frac{y^{n-k-1}dy}{1-y} +$$

$$+\frac{n}{2}\int_{\xi}^{1}\frac{d^k\Phi_{n-1}(x)}{dx^k}\,dx\int_0^{\frac{1+\xi}{1+x}}\frac{y^{n-k-1}\,dy}{1-y},$$

справедливому при $k \leqslant n-1$, $n \geqslant 1$. Это соотношение доказывает указанное выше свойство производных.

Полученные в настоящем параграфе результаты позволяют выразить в явном виде любое решение уравнений (21) — (22) для безграничного

пространства. На краевых задачах для ограниченных областей пространства мы здесь не останавливаемся.*

Институт физики атмосферы
АН СССР

Поступила в редакцию
25. 12. 55

ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Н. Колмогоров, Об аналитических методах в теории вероятностей, Успехи матем. наук, вып. 5 (1938).

A STATISTICAL INTERPRETATION OF THE SCATTERING OF MICROPARTICLES

A. S. MONIN (MOSKOW)

(Summary)

The kinetic theory of microparticles moving in a dispersive and absorptive medium is constructed on the supposition that along a random path the radius vector of the particle, the unit vector of its velocity and its energy taken together form a Markov stochastic process. The processes of scattering in a homogeneous and isotropic medium are considered in detail when there are no energy changes. A solution to the kinetic equation is found for these processes for the case of an instantaneous point source of particles.

---

* Уже после сдачи настоящей работы в печать я познакомился с заметкой Л. М. Бибермана и Б. А. Векленко на ту же тему (ЖЭТФ, т. 31, вып. 2 (8), 1956).

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
Том I И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ Выпуск 3
1956

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ НЕКОТОРЫХ СТАТИСТИК, АНАЛОГИЧНЫХ ВЕЛИЧИНЕ χ^2

И. И. ГИХМАН

Рассмотрим N независимых испытаний с возможными исходами $E_1, E_2, \ldots, E_n$, вероятности которых равны, соответственно, $p_1, p_2, \ldots, p_n$, $p_i > 0$, $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. Обозначим через m_i число испытаний с исходом E_i. Недавно С. Х. Туманян [1, 2] исследовал величину χ^2,

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{N}{p_i}\left(\frac{m_i}{N} - p_i\right)^2, \tag{1}$$

в предположении, что число возможных исходов n неограниченно возрастает одновременно с числом испытаний N. Основной результат С. Х. Туманяна состоит в следующем: *если*

$$\min_{1 \leqslant i \leqslant n} Np_i \to \infty \quad \textit{при } N \to \infty, \tag{2}$$

то величина $\dfrac{\chi^2 - n}{\sqrt{2n}}$ *асимптотически нормальна* (0,1). В настоящей заметке будут рассмотрены только такие группы возможных исходов, для которых $\max p_i \to 0$ при $N \to \infty$. Считая, что соответствующие события перенумерованы числами от 1 до m, $m = m(N)$, предположим еще, что

$$\sum_{i=1}^{m} p_i = \alpha_0 \leqslant 1,$$

где α_0 не зависит от N. При этом, как было сказано ранее,

$$\lim_{N \to \infty} \max_{1 \leqslant i \leqslant m} p_i = 0. \tag{3}$$

Для части суммы χ^2, соответствующей рассматриваемой группе возможных исходов испытаний, будет приведена теорема, обобщающая результаты С. Х. Туманяна.

Далее рассматриваются случаи, когда условие (2) не выполняется. В этих случаях оказывается целесообразным заменить величину χ^2 другими статистиками, аналогичными по структуре величине χ^2, но отличающимися от последней нормирующими коэффициентами.

Положим

$$\chi^2(k) = \sum_{i=1}^{k} \frac{N}{p_i}\left(\frac{m_i}{N} - p_i\right)^2, \quad \sum_{1}^{k} p_i = \alpha(k).$$

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (3) *и*

$$\lim_{N \to \infty} \min_{1 \leqslant i \leqslant m} Np_i = \infty. \tag{A_1}$$

Обозначим через $\psi_i(t)$, $i=1,2$ — *две гладкие на* $[0,1]$ *функции, причем*

$$\psi_1(0)<0<\psi_2(0), \quad \psi_1(t)<\psi_2(t), \quad t\in[0,1].$$

Тогда вероятность совместного осуществления неравенств

$$\psi_1\left(\frac{k}{n}\right)<\frac{\chi^2(k)-k}{\sqrt{2n}}<\psi_2\left(\frac{k}{n}\right), \quad k=1,2,\ldots, m,$$

при $N\to\infty$ *стремится к* $u(0,0)$, *где* $u(t, x)$ — *решение уравнения*

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$$

в области $0\leqslant t<\alpha_0$, $\psi_1(t)<x<\psi_2(t)$, *удовлетворяющее граничным условиям*

$$u(t, \psi_1(t))=u(t, \psi_2(t))=0, \quad 0\leqslant t<\alpha_0,$$
$$u(\alpha_0, x)=1, \quad \psi_1(\alpha_0)<x<\psi_2(\alpha_0).$$

Эту теорему можно сформулировать проще:
если выполнены условия (3) *и* (A_1), *то последовательность серий случайных величин*

$$\frac{\chi^2(k)-k}{\sqrt{2n}}$$

сходится к брауновскому процессу.

Приведенная формулировка нуждается в пояснениях. Рассмотрим последовательность серий случайных векторов

$$\{\eta(N, k); \quad k=1,2,\ldots, n_N\}, \quad N=1,2,\ldots; \quad \eta(N, k)=(\eta_1(N, k),\ldots, \eta_r(N, k)), \qquad (4)$$

и пусть $\{\psi_s(t), \varphi_s(t); \ s=1,2,\ldots, r\}$ — последовательность $2r$ гладких функций на $[a, b]$. Условимся называть рассматриваемую последовательность серий случайных векторов сходящейся к непрерывному векторному случайному процессу $\{\eta(t)\}$ на сегменте $[a, b]$, если существует последовательность серий чисел $\{t_{N,k}; \ k=1,2,\ldots, n_N\}$, $N=1,2\ldots$, удовлетворяющих условиям

$$a=t_{N,1}<t_{N,2}<\ldots<t_{N,n_N}=b,$$

и такая, что вероятность совместного осуществления неравенств

$$\psi_s(t_{N,k})<\eta_s(N, k)<\varphi_s(t_{N,k}), \quad k=1,2,\ldots, n_N$$

при $N\to\infty$ сходится к вероятности совместного осуществления неравенств

$$\psi_s(t)<\eta_s(t)<\varphi_s(t), \quad s=1,\ldots, r, \quad a\leqslant t\leqslant b.$$

Предельные случайные процессы, которые будут встречаться в настоящей заметке, являются процессами Маркова и могут быть заданы дифференциальным уравнением Колмогорова, имеющим вид

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\sum_1^r a_s(t, x)\frac{\partial u}{\partial x_s}+\frac{1}{2}\sum_{s,j=1}^r b_{sj}(t, x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_s\partial x_j}=0.$$

Дифференциальный оператор

$$L=\sum_{s=1}^r a_s(t, x)\frac{\partial}{\partial x_s}+\frac{1}{2}\sum_{s,j=1}^r b_{sj}(t, x)\frac{\partial^2}{\partial x_s\partial x_j}$$

называется производящим оператором процесса Маркова.
Если производящий оператор равен

$$\frac{1}{2}\sum_{s=1}^r\frac{\partial^2}{\partial x_s^2},$$

то процесс называется броуновским процессом. К этому процессу мы и пришли в теореме 1.

По поводу введенного понятия сходимости последовательности серий случайных величин к непрерывному случайному процессу сделаем еще следующее важное замечание, оправдывающее данное определение. В работе Донскера [3] фактически содержится следующая теорема:

Пусть $\eta(t)$ — непрерывный r-мерный случайный процесс $(a \leqslant t \leqslant b)$ и $\Phi(\eta(t))$ — произвольный почти всюду непрерывный функционал на пространстве непрерывных на $[a, b]$ векторных функций с мерой, индуцированной случайным процессом $\{\eta(t)\}$. Обозначим через Γ_N случайную ломаную с вершинами в точках $(t_{N,k}, \eta(N, k))$. Если последовательность серий (4) сходится к процессу $\{\eta(t)\}$ на $[a, b]$, то последовательность случайных величин $\Phi(\Gamma_N)$ слабо сходится к случайной величине $\Phi(\eta(t))$.

Для броуновского процесса распределение функционала $\Phi(\eta(t))$ в ряде частных случаев хорошо известно. В частности, предельное распределение $F(\alpha, x)$ величины

$$\max_{1 \leqslant k \leqslant \alpha} \frac{|\chi^2(k) - k|}{\sqrt{2n}}$$

при выполнении условий теоремы 1 совпадает с распределением величины $\max\limits_{0 \leqslant t \leqslant \alpha} |\eta(t)|$ для одномерного броуновского движения и дается формулой

$$F(\alpha, x) = \frac{4}{\pi\sqrt{\alpha}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k-1} e^{-\frac{(2k-1)^2\pi^2\alpha}{8x^2}}. \tag{5}$$

Перейдем теперь к тем случаям, когда условие (A_1) не выполняется. Можно считать в известном смысле, противоположным (A_1) условие

$$\lim_{N \to \infty} \max_{1 \leqslant i \leqslant m} Np_i = 0. \tag{A_2}$$

Промежуточным между (A_1) и (A_2) является условие

$$Np_i \to \frac{1}{c}; \quad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{A_3}$$

или более общее

$$\frac{1}{Np_{i+1}} - c(\alpha(i)) \to 0, \tag{A_3'}$$

где $c(t)$ — непрерывная на $[0,1]$ функция.

В случае (A_1) была доказана сходимость к броуновскому процессу последовательности серий сумм вида

$$\eta_1(N, k) = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\sqrt{2n}} \left[\frac{N}{p_i} \left(\frac{m_i}{N} - p_i \right)^2 - 1 \right]. \tag{6}$$

В случае (A_2) оказывается целесообразным заменить множитель $\frac{1}{\sqrt{2n}}$, стоящий при каждом слагаемом суммы (6), на множитель $\sqrt{N}\,p_i$, а в случае (A_3') на $\sqrt{p_i}$. В соответствии с этим введем суммы

$$\eta_2(N, k) = \sum_{i=1}^{k} \sqrt{N} \left[N \left(\frac{m_i}{N} - p_i \right)^2 - p_i \right], \tag{7}$$

$$\eta_3(N, k) = \sum_{i=1}^{k} \left[\frac{N}{\sqrt{p_i}} \left(\frac{m_i}{N} - p_i \right)^2 - \sqrt{p_i} \right]. \tag{8}$$

Рассмотрим еще последовательность

$$\eta_0(N, k) = \sum_{i=1}^{k} \sqrt{N} \left(\frac{m_i}{N} - p_i \right). \tag{9}$$

На свойствах последовательности $\eta_0(N, k)$ основан критерий согласия А. Н. Колмогорова и они подробно исследованы (см., напр., [4]). Основной асимптотический результат для этой последовательности состоит в следующем: *при* $N \to \infty$ *последовательность серий* $\eta_0(N, k)$ *сходится к непрерывному процессу Маркова с производящим оператором*

$$-\frac{x}{1-t}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}.$$

Этот результат основан только на предположении $\lim\limits_{N\to\infty}\max\limits_{i} p_i = 0$ и не связан с дополнительными предположениями (A_i). Введение этой последовательности в нашем случае связано с тем, что пары величин $(\eta_0(N, k), \eta_i(N, k); k = 1,2,..,n)$ $i=1,2,3$ образуют двумерную цепь Маркова, сходящуюся при выполнении условия (A_i) к непрерывному процессу Маркова. Так, в случае (A_2) имеет место

Теорема 2. *Если выполнены условия* (3) *и* (A_2), *то величины* $\eta_0(N, k)$ *и* $\eta_2(N, k)$ *асимптотически эквивалентны, т. е.*

$$\eta_0(N, k) - \eta_2(N, k) \to 0.$$

В частности, предельный закон распределения $F_2(x)$ величины

$$\max_{1\leqslant k\leqslant n} |\eta_2(N, k)| = \max_{1\leqslant k\leqslant n} \sqrt{N}\left|N\sum_{1}^{k}\left(\frac{m_i}{N}-p_i\right)^2-\sum_{1}^{k}p_i\right|$$

совпадает с предельным распределением критерия А. Н. Колмогорова

$$\max_{1\leqslant k\leqslant n} |\eta_0(N, k)|$$

и равен

$$F_2(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}(-1)^k e^{-2k^2x^2}. \tag{10}$$

В связи с последней теоремой естественно поставить вопрос о возможных флуктуациях разности $\eta_2(N, k) - \eta_0(N, k)$. Оказывается, что они имеют порядок $\sqrt{Np_k}$. Более точно, рассмотрим последовательность серий случайных величин

$$\eta_4(N, k) = \sum_{i=1}^{k}\frac{\Delta\eta(N, i) - \Delta\eta_0(N, i)}{\sqrt{Np_i}}$$

или, в более явном виде,

$$\eta_4(N, k) = \sum_{i=1}^{k}\left\{\frac{N}{\sqrt{p_i}}\left(\frac{m_i}{N}-p_i\right)^2-\sqrt{p_i}-\frac{1}{\sqrt{p_i}}\left(\frac{m_i}{N}-p_i\right)\right\}. \tag{11}$$

Последовательность $\eta_4(N, k)$ может быть также выражена через последовательности $\{\eta_3(N, k)\}$, $\{\eta_4(N, k)\}$:

$$\eta_4(N, k) = \sum_{i=1}^{k}\left\{\Delta\eta_3(N, i) - \frac{1}{\sqrt{Np_i}}\Delta\eta_0(N, i)\right\}.$$

В случае (A_3) последовательность $\{\eta_4(N, k)\}$ асимптотически эквивалентна последовательности

$$\eta_4'(N, k) = \eta_3(N, k) - \sqrt{c}\,\eta_0(N, k). \tag{12}$$

В обоих случаях (A_2) и (A_3') имеет место следующая

Теорема 3. *Если выполнено* (3) *и* (A_2) *или* (A_3'), *то последовательность* $\{\eta_0(N, k)\}$

и $\{\eta_4(N, k)\}$ *асимптотически независимы и последняя из них сходится к броуновскому процессу с производящим оператором* $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$.

В случае (A_3) сформулированная теорема, в силу (12), дает удобный способ построения совместной доверительной области для случайных последовательностей $\{\eta_0(N, k)\}$ и $\{\eta_3(N, k)\}$.

Другой результат, относящийся к поведению эмпирических функций $\eta_3(N, k)$ в случае (A_3') дается следующей теоремой:

Теорема 4. *Если выполнены предположения* (3) *и* (A_3'), *то последовательность серий* $\{\eta_0(N, k)\}$, $\{\eta_3(N, k\}$ *сходится к непрерывному двумерному процессу Маркова с производящим оператором*

$$-\frac{x}{1-t}\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\sqrt{c(t)}\,x}{1-t}\frac{\partial}{\partial y}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+2\sqrt{c(t)}\,\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}+(2+c(t))\,\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right).$$

Доказательства сформулированных теорем получаются путем обоснования предельного перехода от интегро-разностных уравнений, характеризующих цепь Маркова, к дифференциальным уравнениям Колмогорова для непрерывных процессов. Такое обоснование может быть дано с помощью метода верхних и нижних функций (см. например, [5]). Подробности мы здесь опускаем.

Поступила в редакцию
10.2.56

ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Х. Туманян, ДАН СССР, **34** № 6, (1954), 1011—1012.
[2] С. Х. Туманян, Теория вероятностей и ее применения, **1**, вып. 1, (1956), 131—145.
[3] M. D. Donsker, Memoirs Am. Math. Soc, № 6, 1951.
[4] И. И. Гихман, ДАН СССР, 82, № 6, (1952), 837—840.
[5] А. Н. Колмогоров, ДАН СССР, сер. физ.-матем., 1933, 363—372.
[6] А. Я. Хинчин, Асимптотические законы теории вероятностей, ОНТИ, 1936.

ON ASYMPTOTIC PROPERTIES OF CERTAIN STATISTICS SIMILAR TO χ^2

I. I. GIHMAN (KIEV)

(*Summary*)

A sequence of series of tests are considered (independent in each series) which have possible outcomes $E_1, E_2, \ldots, E_n$ occurring with a probability of $p_1, p_2, \ldots, p_n$ respectively, where $p_i > 0$ and $\sum_i p_i = 1$. A group of possible outcomes $(E_{i_1}, E_{i_2}, \ldots, E_{i_m})$ are distinguished for which

$$\lim_{N\to\infty}\max_{1\leqslant k\leqslant m} p_{i_k} = 0, \quad \text{and} \quad \sum_{k=1}^{m} p_{i_k} = \alpha_0,$$

where m and α_0 is independent of number of series N.

Theorems are given for sequences of series of certain statistics similar in structure to χ^2, which show that these sequences converge to corresponding continuous Markov processes.

ЛОКАЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ ПЛОТНОСТЕЙ СУММ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

В. В. ПЕТРОВ

1. Рассмотрим последовательность взаимно независимых случайных величин X_1 $X_2,\ldots$, имеющих функции распределения $F_1(x)$, $F_2(x),\ldots$, математические ожидания которые без ограничения общности можно считать равными нулю, и конечные дисперсии σ_1^2, $\sigma_2^2,\ldots$. Мы будем пользоваться всюду в дальнейшем обозначениями

$$s_n^2 = \sum_{j=1}^{n} \sigma_j^2, \qquad Z_n = \frac{1}{s_n} \sum_{j=1}^{n} X_j.$$

Функцию распределения величины Z_n будем обозначать через $\overline{F}_n(x)$, а соответствующую плотность распределения, если она существует, через $p_n(x)$.

В работах ряда авторов изучались условия существования плотности $p_n(x)$ и ее сходимости, в том или ином смысле, к плотности предельного распределения. Особое внимание уделялось отысканию условий равномерной сходимости $p_n(x)$ к плотности нормального распределения

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

При этом преимущественно рассматривался случай, когда величины X_1, $X_2,\ldots$ имеют одинаковое распределение (см. книгу Б. В. Гнеденко и А. Н. Колмогорова [1], а также венгерский и английский переводы этой книги, в которых формулировки локальных теорем улучшены). Для некоторых задач, связанных с локальной предельной теоремой для одинаково распределенных слагаемых, в последнее время найдено окончательное решение. Ю. В Прохоров [2] установил необходимые и достаточны, условия сходимости $p_n(x)$ к плотности предельного распределения $p(x)$ в среднем, а Б. В. Гнеденко [3] — необходимые и достаточные условия равномерной сходимости $p_n(x)$ к $p(x)$.

Случай неодинаковых распределений изучался в книге А. Я. Хинчина [4] и в недавних статьях Смита [5] и Чжен Цзен-туна [6]. Как показал А. Я. Хинчин, локальная теорема для плотностей может быть использована в качестве основного аналитического аппарата классической статистической механики. Для обоснования асимптотических формул статистической механики А. Я. Хинчин использовал найденное им уточнение локальной теоремы, дающее оценку максимального отклонения $p_n(x)$ от плотности нормального распределения $\varphi(x)$. Условия теоремы А. Я. Хинчина жестки; в частности, предполагалось, что все рассматриваемые случайные величины имеют плотности равномерно ограниченной полной вариации и конечные моменты первых пяти порядков, причем дисперсии равномерно ограничены положительной постоянной снизу, а абсолютные пятые моменты — сверху. В целом вопрос о быстроте сходимости $p_n(x)$ к $\varphi(x)$ при $n \to \infty$ для неодинаково распределенных слагаемых значительно менее исследован, чем вопрос о быстроте сходимости функции распределения $\overline{F}_n(x)$ нормированной суммы случайных величин Z_n к нормальной функции распределения.

В настоящей работе найдены при довольно общих условиях оценки для отклонения $p_n(x)$ от $\varphi(x)$. В теореме 1 получена оценка

$$|p_n(x) - \varphi(x)| \leqslant CL_n$$

($C>0$—постоянная, L_n—дробь Ляпунова), аналогичная оценке Эссеена [7] для разности соответствующих функций распределения. Теорема 3 дает асимптотическое разложение $p_n(x)$. Из нее следует локальная теорема А. Я. Хинчина [4]. Один результат А. Я. Хинчина (оценка (6)) при более слабых ограничениях получен в теореме 2, вытекающей из теоремы 1.

Теоремы 2 и 3, обобщающие локальную теорему А. Я. Хинчина, могут быть использованы вместо последней в математических вопросах статистической механики.

2. Будем предполагать, что существуют конечные абсолютные моменты

$$\mathbf{E}\,|X_j|^{2+\delta} = \int_{-\infty}^{\infty} |x|^{2+\delta}\, dF_j(x), \quad j = 1, 2, \ldots,$$

порядка $2+\delta$, где $0 < \delta \leqslant 1$. Введем обозначения

$$L_n = \frac{1}{s_n^{2+\delta}} \sum_{j=1}^{n} \mathbf{E}\,|X_j|^{2+\delta} \quad \text{(дробь Ляпунова)},$$

$$f_j(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, dF_j(x).$$

Теорема 1. *Пусть $s_n \to \infty$ при $n \to \infty$. Если при некотором постоянном $B > 0$ и всех n*

$$\sum_{j=1}^{n} \mathbf{E}\,|X_j|^{2+\delta} \leqslant B s_n^2 \tag{1}$$

и если при некотором постоянном $\varepsilon \left(0 < \varepsilon < (24B)^{-\frac{1}{\delta}}\right)$

$$\int_{|t|>\varepsilon} \prod_{j=1}^{n} |f_j(t)|\, dt = O\left(\frac{1}{n^{\frac{1+\delta}{2}}}\right) \tag{2}$$

то при всех достаточно больших n существует плотность $p_n(x)$ и

$$\left| p_n(x) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \right| \leqslant C L_n. \tag{3}$$

Здесь C — положительная постоянная, зависящая от δ, но не зависящая от n и x.

Теорема 2. *Пусть существуют конечные абсолютные моменты третьего порядка $\mathbf{E}\,|X_j|^3$; $j = 1, 2, \ldots$, и положительные постоянные g и G такие, что при всех n*

$$s_n^2 \geqslant ng, \quad \sum_{j=1}^{n} \mathbf{E}\,|X_j|^3 \leqslant nG. \tag{4}$$

Если при некотором постоянном $\varepsilon \left(0 < \varepsilon < \frac{g}{24G}\right)$

$$\int_{|t|>\varepsilon} \prod_{j=1} |f_j(t)|\, dt = O\left(\frac{1}{n}\right), \tag{5}$$

то при всех достаточно больших n существует плотность $p_n(x)$ и

$$\left| p_n(x) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \right| \leqslant \frac{C_0}{\sqrt{n}}, \tag{6}$$

где C_0 — положительная постоянная, не зависящая от n и x.

Теорема 3. *Пусть существуют конечные абсолютные моменты $\mathbf{E}\,|X_j|^k$; $j = 1, 2, \ldots$, порядка $k \geqslant 3$ (k — целое) и положительные постоянные g и G такие, что при всех n*

$$s_n^2 \geqslant ng, \quad \sum_{j=1}^{n} \mathbf{E}\,|X_j|^k \leqslant nG. \tag{7}$$

Если при некотором постоянном ε $\left(0<\varepsilon<\frac{\sqrt{g}}{4^{\frac{1}{3}}G^{\frac{2}{k}}}\right)$

$$\int\limits_{|t|>\varepsilon n^{\frac{1}{3}}}\prod_{j=1}^{n}|f_j(t)|\,dt=O\left(\frac{1}{n^{\frac{k-1}{2}}}\right), \tag{8}$$

то при всех достаточно больших n *существует плотность* $p_n(x)$ *и*

$$p_n(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}+\sum_{\nu=1}^{k-3}\frac{P_{\nu n}(-\varphi)}{n^{\frac{\nu}{2}}}+O\left(\frac{1}{n^{\frac{k-2}{2}}}\right) \tag{9}$$

равномерно относительно x $(-\infty<x<\infty)$.

Определение функций $P_{\nu n}(-\varphi)=\frac{d}{dx}P_{\nu n}(-\Phi)$ (см., например, в [8], стр. 94).

3. Прежде чем перейти к доказательству высказанных утверждений, выясним степень общности условий (2) и (8), в частности, сравним эти условия с условиями локальной теоремы Смита. Смит показал [5], что $p_n(x)\to\varphi(x)$ при $n\to\infty$ равномерно относительно x, если выполнено условие Линдеберга и если (A) последовательность характеристических функций (х. ф.) $f_1(t)$, $f_2(t)$,... содержит такую подпоследовательность $f_{n_1}(t)$, $f_{n_2}(t)$,..., для которой при некоторых положительных постоянных A, R и α

$$|f_{n_m}(t)|\leqslant\frac{A}{|t|^{\alpha}},\quad m=1,\,2,\,..; \tag{10}$$

при $|t|\geqslant R$; (B) число n^* членов указанной подпоследовательности среди $f_1(t),\ldots,f_n(t)$ удовлетворяет условию

$$\varlimsup_{n\to\infty}\frac{n^*}{s_n^2}>0.$$

Условие (10) выполнено, как легко показать, для х. ф. абсолютно непрерывных распределений с плотностями равномерно ограниченной полной вариации (при этом в (10) можно положить $\alpha=1$), а также во многих других случаях, например для х. ф. случайных величин $\{X_{n_m}\}$ с плотностями $\{h_{n_m}(x)\}$, удовлетворяющих условию: при $y\to 0$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}|h_{n_m}(x+y)-h_{n_m}(x)|\,dx\leqslant C|y|^{\alpha};\quad m=1,\,2,\ldots,$$

где C — положительная постоянная.

Покажем, что при одном дополнительном ограничении условия (2) и (8) являются более общими, чем условия (A) и (B) Смита.

Именно, покажем, что если выполнены условия (A) и (B) и если при всех n и некоторых положительных постоянных c и λ.

$$s_n^2\geqslant cn^{\lambda}, \tag{11}$$

то выполнено условие (2); если же в (11) можно взять $\lambda>\frac{2}{3}$, то выполнено и условие (8).

В условии (A) без ограничения общности можно считать, что $R>2A^{\frac{1}{\alpha}}$. В силу условия (A) и одной леммы Крамера [8], стр. 37, имеем при всех вещественных t

$$|f_{n_m}(t)|\leqslant\Omega(t);\ m=1,\,2,\ldots,$$

где

$$\Omega(t)=\begin{cases}\dfrac{A}{|t|^{\alpha}} & \text{при } |t|\geqslant R,\\ e^{-\gamma t^2} & \text{при } |t|<R,\end{cases}$$

γ — положительная постоянная. В силу условия (B) существует постоянная $\mu>0$ такая, что при всех достаточно больших n будет $n^*>\mu s_n^2$. Поскольку $\Omega(t)\leqslant 1$ при всех t, имеем

$$\prod_{j=1}^{n}|f_j(t)|\,dt\leqslant[\Omega(t)]^{\mu s_n^2}$$

(это неравенство получено Смитом [5]).

Далее, при любом постоянном $\varepsilon>0$ и достаточно больших n имеем

$$\int\limits_{|t|>\varepsilon}\prod_{j=1}^{n}|f_j(t)|\,dt=\int\limits_{\varepsilon<|t|<R}\prod_{j=1}^{n}|f_j(t)|\,dt+\int\limits_{|t|\geqslant R}\prod_{j=1}^{n}|f_j(t)|\,dt\leqslant T_1+T_2,$$

где

$$T_1=\int\limits_{\varepsilon<|t|<R}e^{-\gamma\mu s_n^2 t^2}\,dt,\quad T_2=\int\limits_{|t|\geqslant R}\left(\frac{A}{|t|^{\alpha}}\right)^{\mu s_n^2}dt.$$

Из неравенства

$$\int\limits_{x}^{\infty}e^{-\frac{\beta^2t^2}{2}}\,dt<\frac{1}{\beta^2x}\,e^{-\frac{\beta^2x^2}{2}}\quad(x>0,\ \beta\neq 0)\tag{12}$$

следует, что $T_1=O(s_n^{-m})$ при любом $m>0$, а поэтому в силу (11) $T_1=O(n^{-p})$ при любом $p>0$. Легко видеть, что такая же оценка верна и для интеграла T_2, так как

$$T_2\leqslant\left(\frac{A}{R^{\alpha}}\right)^{\mu s_n^2}R^2\int\limits_{|t|\geqslant R}\frac{dt}{t^2}=O(s_n^{-m})$$

при любом $m>0$.

Итак, если выполнены условия (A) и (B) и условие (11), то при любых постоянных $\varepsilon>0$ и $p>0$

$$\int\limits_{|t|>\varepsilon}\prod_{j=1}^{n}|f_j(t)|\,dt=O(n^{-p}).$$

Таким же образом устанавливается, что из условий (A) и (B) и условия (11) при $\lambda>\frac{2}{3}$ следует, что

$$\int\limits_{|t|>\varepsilon n^{-\frac{1}{3}}}\prod_{j=1}^{n}|f_j(t)|\,dt=O(n^{-p})$$

при любых постоянных $\varepsilon>0$ и $p>0$.

4. Доказательство теоремы 1. Обозначим х. ф. величины Z_n через $\overline{f}_n(t)$. Имеем

$$\overline{f}_n(t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{itx}d\overline{F}_n(x),$$

$$\overline{f}_n(t)=\prod_{j=1}^{n}f_j\left(\frac{t}{s_n}\right).$$

ем, что в условиях теоремы 1 функция $\overline{f}_n(t)$ абсолютно интегрируема при статочно больших значениях n. Отсюда, как известно, будет следовать суще-ие непрерывной производной $\overline{F}_n'(x) = p_n(x)$ и справедливость формулы обра-

$$p_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \overline{f}_n(t)\, dt. \tag{13}$$

но,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\overline{f}_n(t)|\, dt \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |\overline{f}_n(t) - e^{-\frac{t^2}{2}}|\, dt + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \leqslant R_1 + R_2 + 2\sqrt{2\pi},$$

$$R_1 = \int_{|t| \leqslant (24 L_n)^{-\frac{1}{\delta}}} |\overline{f}_n(t) - e^{-\frac{t^2}{2}}|\, dt, \qquad R_2 = \int_{|t| > (24 L_n)^{-\frac{1}{\delta}}} |\overline{f}_n(t)|\, dt.$$

по (см., например, [7], стр. 44; обозначения изменены), что при $|t| \leqslant (24\, L_n)^{-\frac{1}{\delta}}$ $\delta \leqslant 1$

$$|\overline{f}_n(t) - e^{-\frac{t^2}{2}}| \leqslant c_1(\delta)\, L_n |t|^{2+\delta} e^{-\frac{t^2}{4}},$$

$\delta)$ — положительная постоянная, зависящая только от δ. Поэтому $R_1 \leqslant c_2(\delta)\, L_n$. и оценке интеграла R_2 нам понадобится следующая

мма. $L_n \geqslant n^{-\frac{\delta}{2}}$ *при всех* n.

йствительно, если β_2 и $\beta_{2+\delta}$ — абсолютные моменты порядка 2 и $2+\delta$ ($\delta > 0$) рого распределения вероятностей, то

$$\beta_2^{\frac{1}{2}} \leqslant \beta_{2+\delta}^{\frac{1}{2+\delta}}. \tag{14}$$

$F_1(x), \ldots, F_n(x)$ суть функции распределения, то и $\frac{1}{n}\{F_1(x) + \ldots + F_n(x)\}$ является функцией распределения с моментами

$$\beta_2 = \frac{1}{n} s_n^2, \quad \beta_{2+\delta} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \mathrm{E}\,|X_j|^{2+\delta}.$$

и из (14) вытекает утверждение леммы.

метим, что если $0 < \delta \leqslant 1$, то $L_n \geqslant \frac{1}{\sqrt{n}}$. Имеем

$$R_2 = s_n \int_{|t| > s_n^{-1}(24 L_n)^{-\frac{1}{\delta}}} \prod_{j=1}^{n} |f_j(t)|\, dt.$$

следует, что

$$s_n L_n^{\frac{1}{\delta}} = \left(\frac{1}{s_n^2} \sum_{j=1}^{n} \mathrm{E}\,|X_j|^{2+\delta}\right)^{\frac{1}{\delta}} \leqslant B^{\frac{1}{\delta}}.$$

ε — постоянная, удовлетворяющая условиям теоремы 1; в частности, $0 < \varepsilon < 2)^{\frac{1}{\delta}}$. Очевидно,

$$\frac{1}{s_n (24 L_n)^{\frac{1}{\delta}}} > \varepsilon$$

и

$$R_2 \leqslant s_n \int\limits_{|t|>\varepsilon} \prod_{j=1}^{n} |f_j(t)|\, dt.$$

В силу условия (2) $R_2 = O(s_n n^{-\frac{1+\delta}{2}})$. Из леммы и условия (1) получаем

$$n^{-\frac{\delta}{2}} \leqslant L_n \leqslant B s_n^{-\delta},$$

т. е. $s_n \leqslant B^{\frac{1}{\delta}} \sqrt{n}$. Отсюда $R_2 \leqslant c_3(\delta)\, n^{-\frac{\delta}{2}}$ и тем более $R_2 \leqslant c_3(\delta)\, L_n$, если n достаточно велико. Постоянная $c_3(\delta)$ зависит от δ, но не от n.

Остается заметить, что в условиях теоремы 1 $L_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Итак, существование плотности $p_n(x)$ при всех достаточно больших n и равенство (13) доказаны в условиях теоремы 1, а, стало быть, и в более жестких условиях теоремы 2.

Формулу обращения

$$p_n(x) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \left[\overline{f}_n(t) - e^{-\frac{t^2}{2}}\right] dt$$

запишем в виде

$$p_n(x) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{2\pi} \{I_1 + I_2 + I_3\},$$

где

$$I_1 = \int\limits_{|t|\leqslant (21 L_n)^{-\frac{1}{\delta}}} e^{-itx} \left[\overline{f}_n(t) - e^{-\frac{t^2}{2}}\right] dt,$$

$$I_2 = \int\limits_{|t|>(21 L_n)^{-\frac{1}{\delta}}} e^{-itx} \overline{f}_n(t)\, dt, \quad I_3 = -\int\limits_{|t|>(21 L_n)^{-\frac{1}{\delta}}} e^{-itx - \frac{t^2}{2}}\, dt.$$

Заметим, что $|I_1| \leqslant R_1$, $|I_2| \leqslant R_2$ и потому $|I_1| \leqslant c_2(\delta)\, L_n$, $|I_2| \leqslant c_3(\delta)\, L_n$. Полагая в (12) $\beta = 1$, получаем $|I_3| \leqslant c_4(\delta)\, L_n$. Постоянные $c_2(\delta)$, $c_3(\delta)$, $c_4(\delta)$ зависят от δ, а не от n и x. Из сказанного вытекает, что при всех достаточно больших n имеет место оценка (3).

В условиях теоремы 2 имеем $L_n \leqslant \frac{G}{g^{\frac{3}{2}} \sqrt{n}}$, поэтому из (3) следует (6).

5. Доказательство теоремы 3. В силу абсолютной интегрируемости $\overline{f}_n(t)$ при достаточно больших n, которая имеет место уже в более слабых условиях теоремы 1, имеем

$$p_n(x) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} - \sum_{\nu=1}^{k-3} \frac{P_{\nu n}(-\varphi)}{n^{\frac{\nu}{2}}} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \left[\overline{f}_n(t) - g(t)\right] dt,$$

где

$$g(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}\left[1 + \sum_{\nu=1}^{k-3} \frac{P_{\nu n}(it)}{n^{\frac{\nu}{2}}}\right].$$

$P_{\nu n}(it)$ и $P_{\nu n}(-\varphi)$ связаны соотношением

$$P_{\nu n}(it)\, e^{-\frac{t^2}{2}} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} P_{\nu n}(-\varphi)\, dx.$$

Положим

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\left[\overline{f}_n(t) - g(t)\right] dt = I_1 + I_2 + I_3,$$

где

$$I_1 = \int_{|t| \leqslant \sqrt[3]{T_{kn}}} e^{-itx}\left[\overline{f}_n(t) - g(t)\right] dt,$$

$$I_2 = \int_{|t| > \sqrt[3]{T_{kn}}} e^{-itx}\overline{f}_n(t)\, dt,\quad I_3 = -\int_{|t| > \sqrt[3]{T_{kn}}} e^{-itx} g(t)\, dt.$$

Здесь

$$T_{kn} = \frac{\sqrt{n}}{4\rho_{kn}^{k}},\quad \rho_{kn} = \frac{n^{\frac{k-2}{2}}}{s_n^k}\sum_{j=1}^{n} \mathrm{E}\,|X_j|^k.$$

Как показал Крамер [8], при $|t| \leqslant \sqrt[3]{T_{kn}}$

$$\overline{f}_n(t) = g(t) + \frac{\theta_k}{T_{kn}^{k-2}}\left(|t|^k + |t|^{3(k-2)}\right) e^{-\frac{t^2}{2}},$$

где $|\theta_k| \leqslant A_k$, A_k — постоянная, зависящая только от k. В силу условия (7) $1 \leqslant \rho_{kn} \leqslant c_1$, поэтому

$$c_2 n^{-\frac{k-2}{2}} \leqslant T_{kn}^{-k+2} \leqslant c_3 n^{-\frac{k-2}{2}}$$

($c_1, c_2, \ldots$ — положительные постоянные, не зависящие от n и x). Отсюда

$$|I_1| \leqslant \frac{c_4}{n^{\frac{k-2}{2}}}.$$

Очевидно, при достаточно больших n

$$|I_3| \leqslant \frac{c_5}{n^{\frac{k-2}{2}}}.$$

Далее,

$$|I_2| \leqslant \int_{|t| > \sqrt[3]{T_{kn}}} |\overline{f}_n(t)|\, dt = s_n^n \int_{|t| > \frac{1}{s_n}\sqrt[3]{T_{kn}}} \prod_{j=1}^{n} |f_j(t)|\, dt.$$

В условиях теоремы 3

$$c_6 n^{\frac{1}{6}} \leqslant \sqrt[3]{T_{kn}} \leqslant c_7 n^{\frac{1}{6}},\quad c_8\sqrt{n} \leqslant s_n \leqslant c_9\sqrt{n},$$

отсюда

$$c_{10}n^{-\frac{1}{3}} \leqslant \frac{1}{s_n} \sqrt[3]{T_{kn}} \leqslant c_{11}n^{-\frac{1}{3}}.$$

Нетрудно показать, что мы можем положить

$$c_{10} = \frac{\sqrt{g}}{4^{\frac{1}{3}} G^{\frac{2}{k}}}.$$

Пусть ε — постоянная, удовлетворяющая условиям теоремы 3. Мы имеем

$$0 < \varepsilon < \frac{\sqrt{g}}{4^{\frac{1}{3}} G^{\frac{2}{k}}}$$

и в силу (8)

$$|I_2| \leqslant s_n \int\limits_{|t|>\varepsilon n^{\frac{1}{3}}} \prod_{j=1}^{n} |f_j(t)|\, dt = O\left(\frac{1}{n^{\frac{k-2}{2}}}\right).$$

Полученные оценки доказывают теорему.

Поступила в редакцию 4.6.56.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Б. В. Гнеденко и А. Н. Колмогоров, Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, Гостехиздат, 1949.
[2] Ю. В. Прохоров, Локальная теорема для плотностей, ДАН СССР, 83 (1952), 797—800.
[3] Б. В. Гнеденко, Локальная предельная теорема для плотностей, ДАН СССР, 95, (1954), 5—7.
[4] А. Я. Хинчин, Математические основания статистической механики, Гостехиздат, 1943.
[5] W. L. Smith, A frequency-function form of the central limit theorem. Proc. Cambridge Philos. Soc., 49 (1953), 462—472.
[6] Cheng Tseng-Tung, On asymptotic expansions connected with the sums of independent random variables, Acta Math. Sinica, 5 (1955), 91—108.
[7] C. G. Esseen, Fourier analysis of distribution functions. A mathematical study of the Laplace — Gaussian law, Acta Math., 77 (1945), 1—125.
[8] Г. Крамер, Случайные величины и распределения вероятностей, Гос. изд. иностр. лит-ры, 1947.

A LOCAL THEOREM FOR DENSITIES OF SUMS OF INDEPENDENT RANDOM VARIABLES

V. V. PETROV (LENINGRAD)

(*Summary*)

Let $X_1, X_2, \ldots$ be a sequence of independent random variables having mean values 0 and dispersions $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots$, and let $p_n(x)$ be the density of the distribution of random variable

$$Z_n = \frac{\sum_1^n X_i}{\sqrt{\sum_1^n \sigma_i^2}} \quad \text{and} \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

An estimate for the deviation of $p_n(x)$ from $\varphi(x)$ is given in the paper for rather general conditions.

In theorem 1 the following estimate is obtained

$$|p_n(x) - \varphi(x)| \leqslant CL_n$$

where $C > 0$ is a constant and L_n is Liapounoff's fraction), which is similar to Esseen's estimate for the difference of corresponding distribution functions.

Theorem 3 gives an asymptotic expansion for $p_n(x)$.

ЕДИНАЯ ФОРМА УСЛОВИЙ ПРИТЯЖЕНИЯ К УСТОЙЧИВЫМ ЗАКОНАМ

Г. П. САКОВИЧ

Введение. Говорят, что вероятностная функция $\mathbf{P}\{\xi\}$ (ξ—борелево множество) определяет устойчивый * закон, если для любых чисел $b_1 > 0$, $b_2 > 0$ и k-мерных векторов A_1 и A_2 и любых независимых векторов X_1 и X_2 существуют такие $b > 0$, A и X, что

$$(b_1 X_1 + A_1) + (b_2 X_2 + A_2) = bX + A;$$

здесь случайные k-мерные векторы X_1, X_2 и X распределены по закону $\mathbf{P}\{\xi\}$ (см. [5], §§ 30, 56, 59, 63; для $k = 1$ см. также [1], §§ 33, 34).

Пусть вектор X определяется сферическими координатами $|X|$ и φ (φ—совокупность угловых координат — пробегает борелево множество Φ). Пусть

$$\vartheta = \begin{cases} 1 & \text{при } |X| = 1, \\ 0 & \text{при } |X| > 1. \end{cases}$$

Тогда, если $f(T) = \int_X e^{i(T, X)} \mathbf{P}\{d\xi\}$ — характеристическая функция устойчивого закона **, то

$$-\log f(T) = iL(T) + \frac{1}{2} Q(T) - C \int_{\varphi,\, |X| > 0} \{e^{i(T, X)} - 1 - i(T, X)\vartheta\} \frac{d|X| \cdot H(d\Phi)}{|X|^{\alpha+1}}, \quad (1)$$

где *** $0 \leqslant \alpha \leqslant 2$,
$H(\Phi) = \mathbf{P}\{|X| = 1, \Phi\}$ — вероятность пребывания X во множестве Φ при условии $|X| = 1$; $C \geqslant 0$; $Q(T)$ — квадратичная, а $L(T)$ — линейная форма от T [$C > 0$, $Q(T) \equiv 0$ при $0 < \alpha < 2$ и $C = 0$, $Q(T) \geqslant 0$ при $\alpha = 2$]. (2)

Выбором b и A можно сделать $C = 1$ (при $C > 0$) и $L(T) = 0$. Обратно, любым α, $H(\Phi)$ и $Q(T)$, для которых выполнены условия (2), соответствует устойчивый закон, характеристическая функция которого удовлетворяет (1).

Необходимые и достаточные условия притяжения к устойчивым законам были найдены в одномерном случае для $\alpha = 2$ независимо А. Я. Хинчиным [9], В. Феллером

---

* В [5] употребляется термин la loi quasi-stable.

** Если область интегрирования не указана, то интегрирование производится по всей области изменения соответственного переменного.

*** В [5] и [1] также производится интегрирование по $|X|$. Введенное нами ϑ позволяет сохранить в формуле (1) непрерывность при $\alpha = 1$.

[8] и Полем Леви [6], а для $0<\alpha<2$, также независимо, Б. В. Гнеденко [2] и В. Дёблином [3] (они изложены в [1], § 35, и в $n°$ 1 ниже). Для многомерного случая их можно найти у Е. Л. Рвачевой [7] (см. также $n°$ 2 ниже). Формулировки условий существенно различались для $\alpha=2$ и $0<\alpha<2$.

В настоящей заметке необходимые и достаточные условия притяжения к устойчивым законам даны в форме, пригодной сразу для $0<\alpha\leqslant 2$; представляется также возможность разумным, повидимому, образом трактовать случай $\alpha=0$ (см. $n°$ 3).

1°. **Одномерный случай** для простоты рассмотрим отдельно.

Теорема 1. *Закон распределения $F(X)$ случайной величины X притягивается к устойчивому закону тогда и только тогда, когда существуют пределы*

$$\lim_{R\to+\infty}\frac{R^2F(-R)}{\int\limits_{-R}^{R}X^2\,dF(X)}\quad\text{и}\quad\lim_{R\to+\infty}\frac{R^2[1-F(R)]}{\int\limits_{-R}^{R}X^2\,dF(X)}; \tag{3}$$

при этом сумма этих пределов $\mathfrak{A}$ и показатель устойчивого закона α связаны соотношениями:

$$\mathfrak{A}=\frac{2-\alpha}{\alpha},\quad \alpha=\frac{2}{1+\mathfrak{A}}. \tag{4}$$

Здесь не исключен случай $\alpha=2$ ($\mathfrak{A}=0$); о случае $\alpha=+0$ ($\mathfrak{A}=+\infty$) (см. $n°$ 3).

Доказательство. Для случая $\mathfrak{A}=0$ ($\alpha=2$) результат следует из необходимого и достаточного признака Хинчина — Феллера — Леви:

$$\lim_{R\to+\infty}\frac{R^2[1-F(R)+F(-R)]}{\int\limits_{-R}^{R}X^2\,dF(X)}=0 \tag{5}$$

(так как $1-F(R)\geqslant 0$, $F(-R)\geqslant 0$). В случае же $0<\mathfrak{A}<\infty$ будет $2>\alpha>0$ и

$$\chi(X)=1-F(X)+F(-X) \tag{6}$$

нигде не обращается в нуль; по теореме Гнеденко — Дёблина для притяжения в этом случае необходимо и достаточно, чтобы существовали

$$\lim_{R\to+\infty}\frac{1-F(R)}{F(-R)}=c \quad (7) \qquad \text{и} \lim_{R\to+\infty}\frac{\chi(uR)}{\chi(R)}=\frac{1}{u^{\alpha}} \tag{8}$$

$(0\leqslant c\leqslant\infty)$ при любом $u>0$.

Поэтому нам достаточно доказать эквивалентность соотношений (8) и

$$\lim_{R\to+\infty}\frac{R^2\chi(R)}{\int\limits_{0}^{R}X^2\,d\chi(X)}=\mathfrak{A}. \tag{9}$$

Необходимость. Пусть выполнено (8), $0\leqslant\alpha<2$. Тогда по теореме Лебега при $R\to+\infty$

$$-\int_0^R\frac{X^2\,d\chi(X)}{R^2\chi(R)}=2\int_0^1 u\,\frac{\chi(uR)}{\chi(R)}\,du-1\to 2\int_0^1 u^{1-\alpha}\,du-1=\frac{\alpha}{2-\alpha}$$

[$\chi(uR)/\chi(R)$ мажорируется суммируемой функцией $\mathrm{const}\cdot u^{-\alpha}$].

Достаточность. (Ср. рассуждения Й. Карамата [4].) Пусть выполнено (9), так что существует и предел

$$\lim_{R\to+\infty}\left\{R^2\chi(R)\Big/\int_0^R X\chi(X)\,dX\right\}=2/(1+\mathfrak{A}^{-1})=\mathfrak{B}. \tag{9'}$$

Тогда функция

$$\left\{R\chi(R)\Big/\int_0^R X\chi(X)\,dX\right\}-\mathfrak{B}R^{-1}=o(R^{-1})$$

суммируема на любом интервале $[a, R]$ с $a>0$, так что

$$\log\int_0^R X\chi(X)\,dX-\mathfrak{B}\log R=\text{const}+\int_a^R o(X^{-1})\,dX.$$

Отсюда после исключения с помощью (9′) интеграла получим:

$$\chi(R)=\text{const}\,[\mathfrak{B}+o(1)]\cdot R^{\mathfrak{B}-2}\exp\int_a^R o(X^{-1})\,dX.$$

Здесь как раз $\mathfrak{B}-2=\dfrac{2}{1+\mathfrak{A}^{-1}}-2=-\alpha$, а $\text{const}\cdot[\mathfrak{B}+o(1)]\exp\int_a^R o(X^{-1})\,dX$ — медленно меняющаяся функция, так как

$$\exp\int_a^{uR} o(X^{-1})\,dX\Big/\exp\int_a^R o(X^{-1})\,dX=\exp\int_R^{uR} o(X^{-1})\,dX=$$

$$=\exp\int_1^u o(1)\frac{dX}{X}=\exp[o(1)\log u]=1+o(1).$$

Поэтому выполняется (8).

2°. **Многомерный случай.**

Теорема 2. *Чтобы распределение* $\mathbf{P}(\xi)$ *притягивалось к устойчивому с заданными* $\alpha, H(\Phi)$ *и* $Q(T)$, *необходимо и достаточно выполнение совокупности условий:*

$$\begin{cases}\lim\limits_{R\to\infty}\dfrac{R^2\mathbf{P}\{|X|>R;\,\Phi\}}{\int\limits_{|X|<R}|X|^2\mathbf{P}\{d\xi\}}=\mathfrak{A}H(\Phi), & (10)\\ \lim\limits_{R\to\infty}B\dfrac{\int\limits_{|X|<R}(T,X)^2\mathbf{P}\{d\xi\}}{\int\limits_{|X|<R}|X|^2\mathbf{P}\{d\xi\}}=Q(T) & (11)\end{cases}$$

для любого борелева множества Φ *на единичной сфере и для любого вектора* T [B — *след квадратичной формы* $Q(T)$].

Здесь

$$\mathfrak{A}=\frac{2-\alpha}{\alpha},\qquad \alpha=\frac{2}{1+\mathfrak{A}} \tag{4}$$

(Разумеется, для $\alpha<2$ условие (11) выполнено автоматически.)

Доказательство столь же просто, как и предыдущее.

При $\alpha=2$, как показано в [7], для притяжения необходима и достаточна совокупность условий:

$$\lim_{R\to+\infty}\frac{R^2\mathbf{P}\{|X|>R\}}{\int\limits_{|X|<R}|X|^2\mathbf{P}\{d\xi\}}=0 \quad (12) \qquad \text{и} \qquad \lim_{R\to+\infty}\frac{\int\limits_{|X|<R}(T,X)^2\mathbf{P}\{d\xi\}}{\int\limits_{|X|<R}(T',X)^2\mathbf{P}\{d\xi\}}=\frac{Q(T)}{Q(T')} \quad (13)$$

для произвольных векторов T и T'.

Но из (12) немедленно следует (10) [так как $R^2\mathbf{P}\{|X|>R;\,\Phi\}\geqslant 0$]; а из (13) в силу очень простого, но не встречавшегося нам тождества (верного при $k\geqslant 1$)

$$\sum_{i=1}^{k}(x_1+\ldots-x_i+\ldots+x_k)^2+(4-k)(x_1+\ldots+x_k)^2=4(x_1^2+\ldots+x_k^2)$$

следует, при выборе $T_0'=(1,1,\ldots,1)$, $T_1'=(-1,1,\ldots,1)$,

$$T_2'=(1,-1,\ldots,1),\ T_k'=(1,1,\ldots,-1):$$

$$\lim_{R\to+\infty}\frac{\int\limits_{|X|<R}(T,X)^2\mathbf{P}\{d\xi\}}{\int\limits_{|X|<R}|X|^2\mathbf{P}\{d\xi\}}=\frac{Q(T)}{\frac{1}{4}\left\{\sum\limits_{i=1}^{k}Q(T_i')+(4-k)Q(T_0')\right\}}=\frac{Q(T)}{B}.$$

Обратное очевидно.

При $0<\alpha<2$, в силу результатов той же работы, необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{R\to+\infty}\frac{\mathbf{P}\{|X|>R;\Phi\}}{\mathbf{P}\{|X|>R;\Phi'\}}=\frac{H(\Phi)}{H(\Phi')} \quad (14) \qquad \text{и} \qquad \lim_{R\to+\infty}\frac{\mathbf{P}\{|X|>uR\}}{\mathbf{P}\{|X|>R\}}=\frac{1}{u^{\alpha}} \quad (15)$$

для любых Φ и Φ' для любого $u>0$,

и нам достаточно установить эквивалентность (15) и

$$\lim_{R\to+\infty}\frac{R^2\mathbf{P}\{|X|>R\}}{\int\limits_{|X|\leqslant R}|X|^2\mathbf{P}\{d\xi\}}=\mathfrak{A}, \quad (16)$$

которая немедленно выводится из результата, доказанного в предыдущем пункте.

3°. **Замечания.**

1. Нетрудно видеть, что теоремы останутся справедливыми и для $\alpha=+0$, если «притяжение» в этом случае определить как выполнение соотношения (8) [соответственно, (15)] при $\alpha=+0$ и заменить условие (3) [соответственно, (10)] на (9) [(16)] с $\mathfrak{A}=+\infty$.

2. Единые условия притяжения к устойчивому закону можно дать и в таком виде:

$$\lim_{R\to+\infty}\frac{R^2\,\mathbf{P}\{|X|>R;\Phi\}}{\int\langle X\rangle_R^2\,\mathbf{P}\{d\xi\}}=\frac{2-\alpha}{2}H(\Phi), \quad (17)$$

$$\lim_{R\to+\infty}\frac{\int\langle T,X\rangle_R^2\,\mathbf{P}\{d\xi\}}{\int\langle X\rangle_R^2\,\mathbf{P}\{d\xi\}}=\frac{\alpha}{2}Q(T)+\frac{2-\alpha}{2}B|T|^2, \quad (18)$$

где

$$\langle X\rangle_R=\begin{cases}|X| & \\ R & \end{cases} \qquad \langle T,X\rangle_R=\begin{cases}(T,X) & \text{при } |X|\leqslant R.\\ R|T| & \text{при } |X|>R.\end{cases} \quad (19)$$

Замечание 1 сохраняет силу и здесь. Условие (17) заменяется на

$$\lim_{R\to+\infty}\frac{R^2\mathbf{P}\{|X|>R\}}{\int\langle X\rangle_R^2\mathbf{P}\{d\xi\}}=1. \quad (20)$$

Автор благодарен проф. Б. В. Гнеденко, вниманию которого обязана своим появлением эта заметка.

Поступила в редакцию
10.3.56

ЛИТЕРАТУРА

[1] Б. В. Гнеденко и А. Н. Колмогоров, Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, Гостехтеориздат, М.— Л., 1949.

[2] Б. В. Гнеденко, Диссертация, Моск. гос. ун-т, 1937; К теории областей притяжения устойчивых законов. Уч. зап. МГУ, вып. XXX (Математика, кн. 3), 1939, 61—81.

[3] W. Doeblin. Sur l'ensemble de puissances d'une loi de probalilité. Studia math., IX (I) (1940), 71—96.

[4] J. Karamata. Sur un mode de croissance régulière des fonctions. Mathematica (Cluj), XV (1939), 38—53.

[5] P. Lévy. Théorie de l'addition des variables aléatoires. I-re éd., Gauthier-Villars, Paris, 1937.

[6] P. Lévy. Propriétés asymptotiques des sommes de variables aléatoires indépendantes ou enchainées. J. math. pur. appl., J. Liouville. (9) 14:4 (1935), 347—402.

[7] Е. Л. Рвачева. Об областях притяжения многомерных устойчивых распределений. Уч. зап. Льв. гос. ун-та, т. XXIX, ср. мех.-мат., вып. 1 (6), (1954), 5—44.

[8] W. Feller. Über den zentralen Grenzwertsatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Math. Z., 40:4, 1935, 521—559, 42:2 (1937), 301—312.
[9] А. Я. Хинчин. Sul dominio di attrazione della legge di Gauss. Giorn. Ist. Ital. Attuari, 6 (1935), 371—393.

NOTWENDIGE UND HINREICHENDE BEDINGUNGEN DER ATTRAKTION AN STABILEN VERTEILUNGEN IN EINHEITLICHER FORM

G. N. SAKOVIČ (KIEW)

(Zusammenfassung)

Der Verfasser gibt (in zwei Gestalten) notwendige und hinreichende Bedingungen der Attraktion an K-dimensionale ($K \geqslant 1$) stabile Verteilungen in der Form, die sowohl für den Fall $0 < \alpha < 2$ als auch für den Fall $\alpha = 2$ verwendbar ist. Er beweist den folgenden

Satz. *Damit eine Verteilung* P (ξ) *mit der durch* α *und* H (Φ) *oder* Q (T) [*siehe* (1) — (2)] *bestimmten stabilen Verteilung attraktiert wird, ist notwendig und hinreichend, daß die Formeln* (10) — (11) *mit* (4) [*in anderer Gestalt* (17) — (18)] *erfüllen sind. Dabei ist* B *die Spur der quadratischen Form* Q (T).

Im Falle $\alpha = 0$ gilt dergleichen Satz, wenn man die Attraktion als Erfüllung der Beziehung (15) mit $\alpha = 0$ definiert und danach (10) [bzw. (17)] durch (16) mit $\mathfrak{A} = +\infty$[bzw. (20)] ersetzt.

ОБ ОДНОЙ ХАРАКТЕРИЗАЦИИ БРАУНОВСКОГО ДВИЖЕНИЯ

В. П. СКИТОВИЧ

Пусть $X(t)$ — некоторый случайный процесс и $a(t)$ — некоторая непрерывная функция, определенная в замкнутом промежутке $[a, b]$. Точками $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ разобьем промежуток $[a, b]$ на части и рассмотрим сумму

$$Y_n = \sum_{k=1}^{n} a(t'_k)\,[X(t_k) - X(t_{k-1})],\quad t_{k-1} \leqslant t'_k \leqslant t_k. \tag{1}$$

Если при $\max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} (t_k - t_{k-1}) \to 0$ эта сумма стремится к некоторому пределу (представляющему, вообще говоря, случайную величину), то этот предел мы будем называть интегралом от случайного процесса $X(t)$ и обозначать

$$Y = \int_a^b a(t)\,dX(t).$$

Сходимость интегральных сумм будем понимать в следующем смысле: существует случайная величина Y такая, что $F_n(x) \to F(x)$ при $n \to \infty$ равномерно относительно x на всей вещественной оси ($F_n(x)$ и $F(x)$ — функции распределения случайных величин Y_n и Y). Очевидно, что если $F_n(x) \to F(x)$ при $n \to \infty$ равномерно на всей вещественной оси, то $\varphi_n(u) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{iux}\,dF_n(x)$ будет стремиться при $n \to \infty$ к $\varphi(u) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{iux}\,dF(x)$ равномерно по u в любом конечном интервале. Такое определение стохастического интеграла, несколько отличное от обычного (см., напр., [1]) не лишено смысла, хотя бы потому, что для однородных случайных процессов с независимыми приращениями стохастический интеграл в указанном смысле всегда существует. Действительно, пусть $X(t)$ — однородный случайный процесс с независимыми прира-

щениями и пусть $\varphi(u, t)$ — его характеристическая функция, тогда

$$\varphi_n(u) = \prod_{k=1}^{n} \varphi(a(t'_k)u, t_k - t_{k-1}). \qquad (2)$$

Поскольку в данном случае $\varphi(u, t)$ ни при каких значениях u и t в нуль не обращается и, кроме того, $\varphi(u, t) = [\varphi(u, 1)]^t$, то равенство (2) можно логарифмировать. Пусть $\psi_n(u) = \ln \varphi_n(u)$, а $\psi(u, t) = \ln \varphi(u, t)$, тогда, принимая во внимание, что $\psi(u, t) = t\psi(u, 1)$

$$\psi_n(u) = \sum_{k=1}^{n} \psi(a(t'_k)u, 1)(t_k - t_{k-1}). \qquad (3)$$

Правая часть (3) представляет собой риманову сумму для интеграла $\int_a^b \psi(a(t)u)\,dt$, который в данном случае существует и сходится равномерно для любого конечного u. В дальнейшем мы будем рассматривать только однородные случайные процессы с независимыми приращениями.

Пусть теперь $X(t)$ — однородный случайный процесс с независимыми приращениями и $a(t)$ и $b(t)$ — некоторые непрерывные в замкнутом промежутке $[a, b]$ функции. Будем рассматривать совместное распределение случайных величин

$$Y_n = \sum_{k=1}^{n} a(t'_k)[X(t_k) - X(t_{k-1})]$$

и

$$Z_n = \sum_{k=1}^{n} b(t'_k)[X(t_k) - X_{k-1})].$$

Так как интегралы $\int_a^b a(t)\,dX(t)$ и $\int_a^b b(t)\,dX(t)$ в данном случае существуют, то последовательности функций распределения $F_n(y)$ и $F_n^*(z)$ случайных величин Y_n и Z_n будут сходиться к некоторым функциям распределения $F(y)$ и $F^*(z)$. Если $\Phi_n(y, z)$ — функции распределения случайных векторов (Y_n, Z_n), будут сходиться при $n \to \infty$ к произведению $F(y) \cdot F^*(z)$, то мы будем говорить, что интегралы $Y = \int_a^b a(t)\,dX(t)$ и $Z = \int_a^b b(t)\,dX(t)$ независимы.

Теорема 1. *Если* $\int_a^b [a(t)\,b(t)]^2\,dt \neq 0$, *интегралы* $Y = \int_a^b a(t)\,dX(t)$ *и* $Z = \int_a^b b(t)\,dX(t)$ *независимы, и хотя бы один из интегралов* $\int_a^b \frac{a^2(t)}{b^2(t)}\,dt$, $\int_a^b \frac{b^2(t)}{a^2(t)}\,dt$ *существует, то распределения вероятностей для приращений процесса* $X(t)$ *будут нормальными, т. е. процесс* $X(t)$ *будет броуновским движением.*

Доказательство. Не умаляя общности, можно считать, что распределение вероятностей $X(t)$ симметрично, тогда его характеристическая функция $\varphi(u, t)$ будет положительна при любых u и t. Из независимости интегралов Y и Z (принимая во внимание прежнее обозначение для логарифма $\varphi(u, t)$) следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \psi(a(t'_k)u + b(t'_k)v)\cdot(t_k - t_{k-1}) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left\{ \sum_{k=1}^{n} \psi(a(t'_k)u)\cdot(t_k - t_{k-1}) + \sum_{k=1}^{n} \psi(b(t'_k)v)(t_k - t_{k-1}) \right\},$$

или

$$\int_a^b \psi(a(t)u + b(t)v)\,dt = \int_a^b \psi(a(t)u)\,dt + \int_a^b \psi(b(t)v)\,dt. \tag{4}$$

По условию теоремы существует хоть один из интегралов $\int_a^b \frac{a^2(t)}{b^2(t)}\,dt$, $\int_a^b \frac{b^2(t)}{a^2(t)}\,dt$.

Допустим, например, что интеграл $\int_a^b \frac{b^2(t)}{a^2(t)}\,dt$ конечен и покажем, что функцию $\psi(v)$ можно дифференцировать по v дважды.

Для доказательства последнего утверждения умножим правую и левую части равенства (4) на $x-u$ и проинтегрируем по u от 0 до x.

$$\int_0^x \left\{(x-u)\int_a^b \psi(a(t)u + b(t)v)\,dt\right\} du = \int_0^x \left\{(x-u)\int_a^b \psi(a(t)u)\,dt\right\} du + \frac{x^2}{2}\int_a^b \psi(b(t)v)\,dt.$$

Изменив в левой части порядок интегрирования и положив $a(t)u + b(t)v = z$, получим

$$\int_a^b \left\{\int_{b(t)v}^{a(t)x+b(t)v} \left(x - \frac{z - b(t)v}{a(t)}\right)\psi(z)\,dz\right\}\frac{dt}{a(t)} =$$

$$= \int_0^x \left\{(x-u)\int_a^b \psi(a(t)u)\,dt\right\} bu + \frac{x^2}{2}\int_a^b \psi(b(t)v)\,dt$$

или

$$\int_a^b \left\{\int_0^{a(t)x+b(t)v} \left(x - \frac{z - b(t)v}{a(t)}\right)\psi(z)\,dz\right\}\frac{dt}{a(t)} = \int_0^x \left\{(x-u)\int_a^b \psi(a(t)u)\,dt\right\} du +$$

$$+ \int_a^b \left\{\int_0^{b(t)v} \left(x - \frac{z - b(t)v}{a(t)}\right)\psi(z)\,dz\right\}\frac{dt}{a(t)} + \frac{x^2}{2}\int_a^b \psi(b(t)v)\,dt.$$

Будем теперь правую и левую части полученного равенства формально дифференцировать по v дважды. После несложных выкладок получим:

$$\int_a^b \frac{b^2(t)}{a^2(t)}\psi(a(t)x + b(t)v)\,dt = \frac{x^2}{2}\int_a^b b^2(t)\psi''(b(t)v)\,dt +$$

$$+ x\int_a^b \frac{b^2(t)}{a(t)}\psi'(b(t)v)\,dt + \int_a^b \frac{b^2(t)}{a^2(t)}\psi(b(t)v)\,dt. \tag{5}$$

Поскольку интеграл в левой части (5) существует при любых конечных x и v, то будут существовать и интегралы, находящиеся в правой части этого равенства. Положим $v = 0$. Тогда, принимая во внимание, что $\psi(0) = \psi'(0) = 0$ (мы предполагали, что распределение вероятностей $X(t)$ симметрично), получим

$$\int_a^b \frac{b^2(t)}{a^2(t)}\psi(a(t)x)\,dt = \frac{x^2}{2}\int_a^b b^2(t)\psi''(0)\,dt$$

или

$$\int_a^b \frac{b^2(t)}{a^2(t)}\left[\psi(a(t)x) - \frac{x^2}{2}a^2(t)\psi''(0)\right]dt = 0.$$

Это равенство справедливо при любом конечном x. Так как $\psi(u)$ — непрерывная чет-

пая относительно u функция, которая при $u=0$ имеет равный нулю максимум, то в некоторой окрестности нуля $-\delta<x<\delta$ выражение

$$\psi(a(t)x-\frac{x^2}{2}a^2(t)\psi''(0)$$

сохраняет знак, а это возможно только в том случае, когда $\psi(a(t)x)=\frac{x^2}{2}a^2(t)\psi''(0)$, что и доказывает теорему (см., наприм., [2]).

Если мы будем рассматривать не случайный процесс, а совокупность одинаково распределенных независимых случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ и линейные формы от них

$$Y_1=\sum_{k=1}^{\infty}a_kX_k,\quad Y_2=\sum_{k=1}^{\infty}b_kX_k,$$

то будет справедлива следующая теорема:

Теорема 2. *Если* $\sum_{k=1}^{k}|a_kb_k|\neq 0$, *линейные формы* Y_1 *и* Y_2 *независимы и один из рядов* $\sum\frac{a_k^2}{b_k^2}$, $\sum\frac{b_k^2}{a_k^2}$ *сходится, то все случайные величины распределены нормально.*

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 1. Если $f(u)$ — характеристическая функция случайной величины X_k, то для определения ее логарифма мы будем иметь следующее уравнение:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\ln f(a_ku+b_kv)=\sum_{k=1}^{\infty}\ln f(a_ku)+\sum_{k=1}^{\infty}\ln f(b_kv), \tag{6}$$

которое мы можем решать точно так же, как мы решали уравнение (4).

В результате получим, что в некоторой окрестности нуля будет выполняться равенство $\ln f(a_kx)=cx^2$, из которого и следует справедливость теоремы.

Поступила в редакцию
21.1.56

ЛИТЕРАТУРА

[1] Б. В. Гнеденко, Курс теории вероятностей, ГИТТЛ, 1954.
[2] Ю. В. Линник, О некоторых одинаково распределенных статистиках, ДАН СССР, 89 (1953).

ON CHARACTERIZING BROWNIAN MOTION

V. P. SKITOVIČ (LENINGRAD)

Summary

Let $X(t)$ be a homogeneous random process with independent increments; and $a(t)$, $b(t)$ certain functions that are continuous in the closed interval $[a, b]$. Then the following theorem is true:

if $\int_a^b[a(t)b(t)]^2\,dt\neq 0$, the integrals $Y=\int_a^b a(t)\,dX(t)$ and $Z=\int_a^b b(t)\,dX(t)$ are independent, and if at least one of the integrals $\int_a^b\frac{a^2(t)}{b^2(t)}\,dt$, $\int_a^b\frac{b^2(t)}{a^2(t)}\,dt$ exists, then the process $X(t)$ is a Brownian motion.

A similar theorem is proved for infinite linear forms $\sum_{k=1}^{\infty}a_kX_k$, $\sum_{k=1}^{\infty}b_kX_k$.

ВНИМАНИЮ АВТОРОВ

1. Журнал «Теория вероятностей и ее применения» принимает оригинальные статьи и краткие сообщения по теории вероятностей, общим вопросам математической статистики и применениям теории вероятностей в естествознании и технике. Статьи по прикладным вопросам принимаются лишь в случае существенной новизны применяемых математических методов.

2. Статьи и краткие сообщения печатаются на русском языке с резюме на английском, немецком или французском языках или на английском, немецком, французском языках с резюме на русском языке.

3. Рукопись представляется в двух экземплярах, напечатанной на машинке через 2 интервала на одной стороне листа с указанием адреса автора. Редакция просит в оформлении цитируемой литературы придерживаться порядка, принятого в журнале.

4. Авторам статей высылаются 50 оттисков.

5. Статьи следует направлять по адресу: Москва В-234, МГУ, Механико-математический факультет, кафедра теории вероятностей, или Киев, площадь Калинина, 6, Институт математики АН УССР.

NOTE TO AUTHORS

1. The journal «The Theory of Probability and Its Applications» accepts original articles and communications on the theory of probability, general problems of mathematical statistics and applications of the theory of probability to natural science and technology. Articles of the letter kind will be accepted only if the mathematical methods applied are essentially new.

2. Articles and communications will be published either in Russian with summaries in English, German or Frensh, or in English, German or French with summaries in Russian.

3. All contributions should be sent in two copies, which are typewritten only on one side of the sheet with double spaces. References to books and articles cited should conform to the standard adopted by the publishers.

4. The authors will be sent 50 copies of their articles.

5. Authors are requested to adress their contributions: Moscow, B-234t MGU (State University), Departmen of Mathematics and Mechanics; or to Kiev, Kalinin Square, 6, Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Ukrainian SSR.

Подписано к печати 19/XII 1956 г. Формат бумаги $70\times108^{1}/_{16}$ Бум. л. 2,38. Печ. л. $4^{3}/_{4}$.
Уч.-изд. 6,5. Тираж 1900 Зак. 998 Т-12117

2-я типография Издательства Академии наук СССР. Москва, Шубинский пер., д. 10

Цена 11 р. 25 к.

2-26

116
ЛЕФОРТОВСКИЙ ВАЛ
Д.7.6 КОР.9 КВ.43
ЗОЛОТАРЕВУ Т.Л
7 1 12 ТССР РГБ